Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

Exercice 1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt \text{ converge.}}$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \text{ converge.}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \cos t e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, la fonction $t \mapsto \cos t e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty} \cos t e^{-t}\, dt \text{ converge.}}$$

c) Pour tout entier naturel, la fonction $t \mapsto t^n$ est dans E_1 et la fonction $t \mapsto \cos t$ est dans E_1.

2. • $E_1 \subset E$.
• La fonction nulle est dans E_1.
• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E_1^2$. Alors, pour tout réel x, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)e^{-t}\, dt$ sont convergentes. On en déduit que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)e^{-t}\, dt$ est convergente et donc que $\lambda f + \mu g \in E_1$.

On a montré que

$$\boxed{E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

3. a) • Soit $f \in E_1$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t}\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de l'application $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt - \int_0^x f(t)e^{-t}\, dt$ et finalement de $\varphi(f)$.
Ainsi, φ est bien une application de E_1 dans E.
• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E_1^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = e^x \int_x^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)e^{-t}\, dt = \lambda e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt + \mu e^x \int_x^{+\infty} g(t)e^{-t}\, dt = (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x),$$

et donc $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$.

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E).}$$

b) Soit $f \in E_1$. L'application $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de l'application $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt$ et finalement de F. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt + e^x \frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt - \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt\right) = F(x) - e^x f(x)e^{-x} = F(x) - f(x).$$

$$\boxed{\forall f \in E_1,\ F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } F = F' + f.}$$

c) Soit $f \in E_1$.

$$f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow F = 0 \Rightarrow F = F' = 0 \Rightarrow f = F - F' = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et

$$\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$$

d) D'après la question c), 0 n'est pas valeur propre de φ. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une éventuelle valeur propre de φ et $f \in E_1 \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a $\varphi(f) = \lambda f$ et donc $f = \frac{1}{\lambda}F$ ce qui montre que f est nécessairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus

$$f' = \frac{1}{\lambda}F' = \frac{1}{\lambda}F - \frac{1}{\lambda}f = f - \frac{1}{\lambda}f = \frac{\lambda-1}{\lambda}f.$$

Par suite, nécessairement il existe un réel non nul C tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ce^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$. Ceci montre déjà que les éventuels sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose alors $f_\lambda(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$. f_λ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$f_\lambda(t)e^{-t} = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}e^{-t} = e^{-t/\lambda}.$$

• Si $\lambda < 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t/\lambda}$ est prépondérante en $+\infty$ devant 1 et n'est donc pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Dans ce cas, il n'existe pas de fonction $f \in E_1 \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(f) = \lambda f$.

• Si $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t/\lambda}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ et est donc intégrable au voisinage de $+\infty$. Dans ce cas, f_λ est un élément non nul de E_1. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}t}e^{-t}\,dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t/\lambda}\,dt = e^x\left[-\lambda e^{-t/\lambda}\right]_x^{+\infty} = e^x \times \lambda e^{-x/\lambda} = \lambda e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} = \lambda f_\lambda(x).$$

Dans ce cas, λ est valeur propre et le sous-espace propre associé à λ est la droite vectorielle engendrée par f_λ.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,+\infty[\text{ et } \forall \lambda \in]0,+\infty[,\ E_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda) \text{ où } \forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}.}$$

e) Soit $f \in E_1$, bornée et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déjà f' est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Soient alors x et X deux réels tels que $x < X$. Puisque f est de classe C^1 sur $[x, X]$, on peut effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\int_x^X f(t)e^{-t}\,dt = \left[-f(t)e^{-t}\right]_x^X + \int_x^X f'(t)e^{-t}\,dt = -f(X)e^{-X} + f(x)e^{-x} + \int_x^X f'(t)\,dt.$$

Maintenant, puisque $f \in E_1$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_x^X f(t)e^{-t}\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ et puisque f est bornée, $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)e^{-X} = 0$. On en déduit que l'intégrale $\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt$ converge en $+\infty$ ou encore que $f' \in E_1$ et que

$$\int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t}\,dt = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_x^X f(t)e^{-t}\,dt + f(X)e^{-X} - f(x)e^{-x}\right) = \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt - f(x)e^{-x}.$$

Mais alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f')(x) = e^x \int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t}\ dt = e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\ dt - f(x) = \varphi(f)(x) - f(x)$$
$$= (\varphi(f))'(x) \quad \text{(d'après la question b)).}$$

$$\boxed{f' \in E_1 \text{ et } \varphi(f') = (\varphi(f))'.}$$

On note que le résultat reste valable si on remplace la condition « f est bornée sur $\mathbb{R}$ » par la condition « $\lim\limits_{X \to +\infty} f(X)e^{-X} = 0$ ».

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.b), les fonctions $t \mapsto t^k$, $k \in [\![0, n]\!]$, sont des éléments de E_1 et puisque E_1 est un sous-espace vectoriel de E, le sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions, à savoir E_2, est contenu dans E_1.

$$\boxed{E_2 \subset E_1.}$$

b) **(i)** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_k(x) = x^k$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a déjà

$$\psi(f_0)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ dt = e^x \left[-e^{-t}\right]_x^{+\infty} = e^x \times e^{-x} = 1.$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions 3.b) et 3.e), on a

$$\psi(f_k) = f_k + (\psi(f_k))' = f_k + \psi(f_k') = f_k + k\psi(f_{k-1}.$$

Mais alors

$$\frac{1}{k!}\psi(f_k)(x) - \frac{1}{(k-1)!}\psi(f_{k-1})(x) = \frac{x^k}{k!}.$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$\frac{\psi(f_k)(x)}{k!} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\psi(f_i)(x)}{i!} - \frac{\psi(f_{i-1})(x)}{(i-1)!}\right) + \frac{\psi(f_0)(x)}{0!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x^i}{i!} + 1 = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}.$$

Donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f_k)(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i.}$$

En particulier,

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \psi(f_k) \in E_2,$$

et puisque ψ est linéaire, on a montré que

$$\boxed{\psi \in \mathscr{L}(E_2).}$$

(ii) Puisque φ est injectif d'après la question 3.c), ψ est injectif. Comme ψ est un endomorphisme de E_2 et que E_2 est de dimension finie, on en déduit que

$$\boxed{\psi \in \mathscr{GL}(E_2).}$$

(iii) D'après la question précédente, la matrice de ψ dans la base canonique de E_2 est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous égaux à 1. Donc ψ admet une unique valeur propre à savoir 1. Mais alors, si ψ était diagonalisable, ψ serait l'identité de E_2 ce qui n'est pas. Donc

$$\boxed{\psi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

c) Soit $f \in E_2$. f est de classe C^∞ et $\lim\limits_{X \to +\infty} f(X)e^{-X} = 0$ d'après les théorèmes de croissances comparées. D'après les questions 3.b) et 3.e), on a alors

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(f') + f = \varphi(f'') + f' + f = \ldots = \varphi(f^{(n+1)}) + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} \text{ (car } \varphi(f^{(n+1)} = \varphi(0) = 0).\end{aligned}$$

Mais alors, pour $x \geq a$,

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) = \varphi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt \geq 0.$$

Exercice 2

1. **a)** En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -2 \\ -1 & -2-X & 2 \\ 1 & 3 & -4-X \end{vmatrix} &= (2-X)(X^2+6X+2) + (-3X-6) + (-2X+2) \\ &= -X^3 - 4X^2 + 5X = -X(X^2+4X-5) = -X(X-1)(X+5).\end{aligned}$$

Ainsi, A a trois valeurs propres réelles simples et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) $\det(P) = 3 \times 5 + (-5) = 10 \neq 0$ et donc P est inversible.

2. f admet trois valeurs propres réelles et simples. Donc f est diagonalisable et admet trois sous-espaces propres qui sont trois droites vectorielles.
Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. x engendre alors la droite propre $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$. Mais

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

et donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, $g(x)$ est colinéaire à x ou encore x est un vecteur propre de g.

$$\boxed{\text{Si } g \text{ commute avec } f, \text{ tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } g.}$$

3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f. La question précédente montre que $\mathscr{B}$ est aussi constituée de vecteurs propres de g et donc

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont simultanément diagonalisables.}}$$

4. **a)** Si M est solution de l'équation $(\mathcal{E})$, alors A est un polynôme en M et donc A et M commutent.

b) Vérifions que $A = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(1, 0, -5)$. Calculons tout d'abord P^{-1}.

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l} e_1 = 3i - j \\ e_2 = -2i + 2j + k \\ e_3 = i - j + 2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = -e_1 + 3i \\ e_2 = -2i + 2(-e_1 + 3i) + k \\ e_3 = i - (-e_1 + 3i) + 2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = -e_1 + 3i \\ k = 2e_1 + e_2 - 4i \\ e_3 = -2i + e_1 + 2(2e_1 + e_2 - 4i) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = \dfrac{1}{10}(5e_1 + 2e_2 - e_3) \\ j = -e_1 + \dfrac{3}{10}(5e_1 + 2e_2 - e_3) \\ k = 2e_1 + e_2 - \dfrac{4}{10}(5e_1 + 2e_2 - e_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = \dfrac{1}{10}(5e_1 + 2e_2 - e_3) \\ j = \dfrac{1}{10}(5e_1 + 6e_2 - 3e_3) \\ k = \dfrac{1}{10}(2e_2 + 4e_3) \end{array}\right.,\end{aligned}$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$P\Delta P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 & 30 & -20 \\ -10 & -20 & 20 \\ 10 & 30 & -40 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

Soit maintenant M une éventuelle solution de l'équation $(\mathcal{E})$. D'après a), M commute avec A et d'après 3), la matrice $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D. Mais alors

$$M^2 - 6M = A \Leftrightarrow (PDP^{-1})^2 - 6(PDP^{-1}) = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow P(D^2 - 6D)P^{-1} = P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow D^2 - 6D = \Delta,$$

puisque P et P^{-1} sont deux matrices inversibles et donc simplifiables.

c) Posons $D = \mathrm{diag}(a, b, c)$ où a, b et c sont trois réels.

$$D^2 - 6D = \Delta \Leftrightarrow \mathrm{diag}(a^2 - 6a, b^2 - 6b, c^2 - 6c) = \mathrm{diag}(1, 0, -5) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - 6a = 1 \\ b^2 - 6b = 0 \\ c^2 - 6c = -5 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (a, b, c) \in \{3 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10}\} \times \{0, 6\} \times \{1, 5\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'équation } (\mathcal{E}') \text{ admet } 8 \text{ solutions, à savoir} \\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 0, 1),\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 0, 5),\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 6, 1),\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 6, 5), \\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 0, 1),\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 0, 5),\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 6, 1),\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 6, 5). \end{array}}$$

On obtient alors les 8 solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.

$$P\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 0, 1)\ P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 - 3\sqrt{10} & 0 & 1 \\ -3 + \sqrt{10} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 44 - 15\sqrt{10} & 42 - 15\sqrt{10} & 4 \\ -14 + 5\sqrt{10} & -12 + 5\sqrt{10} & -4 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$P\ \mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 0, 5)\ P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 - 3\sqrt{10} & 0 & 5 \\ -3 + \sqrt{10} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 40 - 15\sqrt{10} & 30 - 15\sqrt{10} & 20 \\ -10 + 5\sqrt{10} & 5\sqrt{10} & -20 \\ -10 & -30 & 40 \end{pmatrix}.$$

et par un calcul conjugué

$$P\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 0, 1)\ P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 + 3\sqrt{10} & 0 & 1 \\ -3 - \sqrt{10} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 44 + 15\sqrt{10} & 42 + 15\sqrt{10} & 4 \\ -14 - 5\sqrt{10} & -12 - 5\sqrt{10} & -4 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$P\ \mathrm{diag}(3 + \sqrt{10}, 0, 5)\ P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 + 3\sqrt{10} & 0 & 5 \\ -3 - \sqrt{10} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 40 + 15\sqrt{10} & 30 + 15\sqrt{10} & 20 \\ -10 - 5\sqrt{10} & -5\sqrt{10} & -20 \\ -10 & -30 & 40 \end{pmatrix}$$

Ensuite,

$$P\mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 6, 1)P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 - 3\sqrt{10} & -12 & 1 \\ -3 + \sqrt{10} & 12 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 - 15\sqrt{10} & -30 - 15\sqrt{10} & -20 \\ 10 + 5\sqrt{10} & 60 + 5\sqrt{10} & 20 \\ 10 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P\mathrm{diag}(3 - \sqrt{10}, 6, 5)P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 - 3\sqrt{10} & -12 & 5 \\ -3 + \sqrt{10} & 12 & -5 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 16 - 15\sqrt{10} & -42 - 15\sqrt{10} & -4 \\ 14 + 5\sqrt{10} & 72 + 5\sqrt{10} & 4 \\ 2 & 30 & 52 \end{pmatrix}$$

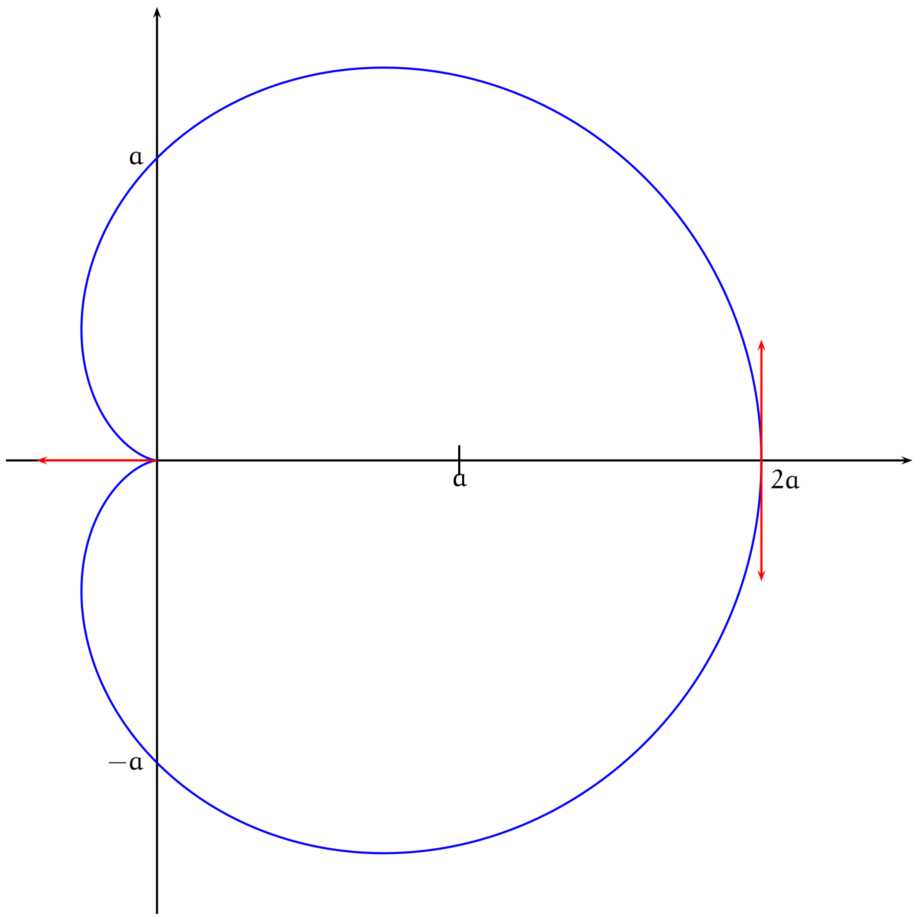
et par un calcul conjugué

$$\mathrm{Pdiag}(3+\sqrt{10},6,1)P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9+3\sqrt{10} & -12 & 1 \\ -3-\sqrt{10} & 12 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20+15\sqrt{10} & -30+15\sqrt{10} & -20 \\ 10-5\sqrt{10} & 60-5\sqrt{10} & 20 \\ 10 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Pdiag}(3+\sqrt{10},6,5)P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9+3\sqrt{10} & -12 & 5 \\ -3-\sqrt{10} & 12 & -5 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 16+15\sqrt{10} & -42+15\sqrt{10} & -4 \\ 14-5\sqrt{10} & 72-5\sqrt{10} & 4 \\ 2 & 30 & 52 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Γ est une cardïoide.



2. Notons $l(\Gamma)$ la longueur de Γ.

$$
\begin{aligned}
l(\Gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2(-\sin\theta)^2}\, d\theta = a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \text{ (car si } \theta\in[-\pi,\pi],\ \frac{\theta}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ et donc } \cos\frac{\theta}{2}\geq 0) \\
&= 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{l(\Gamma) = 8a.}$$

3. **a)** Notons Γ' la courbe Γ privée du point $M(\pi) = (0,0)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan. Puisque la fonction φ est une bijection, on a

$$M \in \Gamma' \Leftrightarrow \exists \theta \in]-\pi,\pi[/ \left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta(1+\cos\theta) \\ y = a\sin\theta(1+\cos\theta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists \theta \in]-\pi,\pi[/ \left\{\begin{array}{l} x = a\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}(1+\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}) \\ y = a(1+\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}(1+\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}) \\ y = a\dfrac{2t}{1+t^2}(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = 2a\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y = 4a\dfrac{t}{(1+t^2)^2} \end{array}\right.$$

b) Soit $\tau \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(\tau) = 2a\begin{pmatrix} -2\tau\dfrac{1}{(1+\tau^2)^2} + (1-\tau^2)\dfrac{-4\tau}{(1+\tau^2)^3} \\ 2\dfrac{1}{(1+\tau^2)^2} + 2\tau\dfrac{-4\tau}{(1+\tau^2)^3} \end{pmatrix} = \frac{2a}{(1+\tau^2)^3}\begin{pmatrix} -2\tau(1+\tau^2) - 4\tau(1-\tau^2) \\ 2(1+\tau^2) - 8\tau^2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{4a}{(1+\tau^2)^3}\begin{pmatrix} \tau(-3+\tau^2) \\ 1-3\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(\tau)$ n'est jamais nul et donc pour tout réel τ, le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(\tau)$ dirige la tangente T_τ à Γ en le point M de paramètre τ. Un autre vecteur directeur de cette tangente est le vecteur $(-\tau^3+3\tau, 3\tau^2-1)$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in T_\tau \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2a\dfrac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^2} & -\tau^3+3\tau \\ y - 2a\dfrac{2\tau}{(1+\tau^2)^2} & 3\tau^2-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\tau^3-3\tau)y + (3\tau^2-1)x + 2a\frac{-(1-\tau^2)(3\tau^2-1)+2\tau(-\tau^3+3\tau)}{(1+\tau^2)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\tau^3-3\tau)y + (3\tau^2-1)x + 2a\frac{\tau^4+2\tau^2+1}{(1+\tau^2)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (3\tau^2-1)y + (\tau^3-3\tau)x + 2a = 0 \text{ (car } t \neq \tau).$$

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente à } \Gamma \text{ en } M(\tau) \text{ est } (\tau^3-3\tau)y + (3\tau^2-1)x + 2a = 0.}$$

c) Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{\tau\}$,

$$M(t) \in T_\tau \Leftrightarrow (\tau^3-3\tau) \times \frac{4at}{(1+t^2)^2} + (3\tau^2-1) \times \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + 2a = 0$$
$$\Leftrightarrow 2t(\tau^3-3\tau) + (1-t^2)(3\tau^2-1) + (1+t^2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^4 + (-3\tau^2+3)t^2 + 2t(\tau^3-3\tau) + 3\tau^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t^2-2\tau t+\tau^2)(t^2+2\tau t+3) = 0 \Leftrightarrow (t-\tau)^2(t^2+2\tau t+3) = 0 \Leftrightarrow t^2+2\tau t+3 = 0.$$

Maintenant, le discriminant réduit du trinôme $t^2+2\tau t+3$ est $\Delta' = \tau^2-3$ et l'équation $t^2+2\tau t+3=0$ a des solutions réelles t_1 et t_2 si et seulement si $\tau^2 \geq 3$. Ces solutions vérifient alors $t_1t_2 = 3$.

Soit $N(\alpha,\beta)$ un point du plan.

$$N \in T_{t_1} \cap T_{t_2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t_1^3-3t_1)\beta + (3t_1^2-1)\alpha + 2a = 0 \\ (t_2^3-3t_2)\beta + (3t_2^2-1)\alpha + 2a = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont racines de l'équation } (t^3-3t)\beta + (3t^2-1)\alpha + 2a = 0 \text{ (E)}.$$

Si $\beta = 0$, l'équation (E) est de degré au plus 2 et admet donc au plus 2 solutions.
Si $\beta \neq 0$ et si t_1 et t_2 sont racines de l'équation (E), l'équation (E) admet une troisième solution t_3 telle que

$$3t_3 = t_1t_2t_3 = -\frac{-\alpha + 2a}{\beta},$$

et donc

$$\boxed{t_3 = \frac{\alpha - 2a}{3\beta}.}$$

d) Ainsi, si $N(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$, est un point d'intersection, le nombre $t_3 = \dfrac{\alpha - 2a}{3\beta}$ est racine du polynôme P. Mais

$$\begin{aligned}
P(t_3) = 0 &\Rightarrow \left(\frac{(\alpha-2a)^3}{27\beta^3} - 3\frac{\alpha-2a}{3\beta}\right)\beta + \left(3\frac{(\alpha-2a)^2}{9\beta^2} - 1\right)\alpha + 2a = 0 \\
&\Rightarrow \frac{(\alpha-2a)^3}{27\beta^2} - (\alpha - 2a) + \frac{\alpha(\alpha-2a)^2}{3\beta^2} - \alpha + 2a = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha-2a)^3 - 27\beta^2(\alpha-2a) + 9\alpha(\alpha-2a)^2 - 27\alpha\beta^2 + 54a\beta^2 = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha-2a)^3 - 27\beta^2(\alpha-2a) + 9\alpha(\alpha-2a)^2 - 27\beta^2(\alpha-2a) = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha-2a)\left[(\alpha-2a)^2 - 27\beta^2 + 9\alpha(\alpha-2a) - 27\beta^2\right] = 0 \\
&\Rightarrow (\alpha-2a)\left[10\alpha^2 - 54\beta^2 - 22a\alpha + 4a^2\right] = 0
\end{aligned}$$

Donc, si $\alpha \neq 2a$, on a $10\alpha^2 - 54\beta^2 - 22a\alpha + 4a^2 = 0$.

L'ensemble des points $N(\alpha, \beta)$ tels que $\alpha \neq 2a$ et $\beta \neq 0$ est contenu dans l'ensemble $(\mathscr{H})$ d'équation $10x^2 - 54y^2 - 22ax + 4a^2 = 0$.

e) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow 10x^2 - 54y^2 - 22ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(x - \frac{11a}{10}\right)^2 - 27y^2 - \frac{121a^2}{20} + 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x - \frac{11a}{10}\right)^2 - 27y^2 = \frac{41a^2}{20} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{11a}{10}\right)^2}{\frac{41a^2}{100}} - \frac{y^2}{\frac{41a^2}{540}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{11a}{10}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{41}a}{10}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{615}a}{90}\right)^2} = 1.$$

Déjà, $(\mathscr{H})$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\dfrac{11a}{10}, 0\right)$ et d'axe focal $(\Omega, \overrightarrow{i})$, c'est-à-dire l'axe (Ox).
En notant F et F' les foyers de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ et en posant $c = \Omega F = \Omega F'$, on a

$$c = \sqrt{\frac{41a^2}{100} + \frac{41a^2}{540}} = \frac{2\sqrt{246}}{45}a,$$

et donc $F((\dfrac{11}{10} + \dfrac{2\sqrt{246}}{45})a, 0)$ et $F'((\dfrac{11}{10} - \dfrac{2\sqrt{246}}{45})a, 0)$. On a aussi l'excentricité e de $(\mathscr{H})$:

$$e = \frac{\frac{2\sqrt{246}}{45}a}{\frac{\sqrt{41}a}{10}} = \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

Les asymptotes de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ sont les droites passant par Ω et de pentes

$$\pm\frac{\frac{\sqrt{615}a}{90}}{\frac{\sqrt{41}a}{10}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{9}.$$

Les asymptotes de $(\mathscr{H})$ sont donc les droites d'équations respectives $y = \dfrac{\sqrt{15}}{9}(x - \dfrac{11a}{10})$ et $y = -\dfrac{\sqrt{15}}{9}(x - \dfrac{11a}{10})$.