e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ une série alternée avec :

i) $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n > 0,$

ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$

iii) la suite (u_n) converge en décroissant vers 0,

iv) $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n.$

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k.$

1. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$

2. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{n+p} - u_{n+1+p} \right].$

En déduire la monotonie de la suite $\left(|R_n| \right)_{n\geqslant 0}.$

3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$

4. En déduire qu'au voisinage de l'infini : $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}.$

Tournez la page S.V.P

5. *Application* :

Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 2.

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs et telles que : $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbf{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall\ n \in \mathbf{N},\quad a_n = b_n\ (1 + \gamma_n)$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}$.

3.1. Prouver l'existence de $\delta_m = \sup\limits_{n\geqslant m} |\gamma_n|$.

3.2. Montrer que :

$$\forall\ t > 0,\ \forall\ m \in \mathbf{N},\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}\, t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n\, t^n.$$

3.3. En déduire que : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Applications :

4. Soit h la fonction définie par : $t \mapsto h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}\, t^n$.

4.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

4.2. Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}$:

$$ty''(t) + (1 - t)y'(t) = 1$$

5.1. Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

Préciser les coefficients de ce développement.

5.2. Donner une expression simple de $z'(t)$ pour $t > 0$.

5.3. Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisinage de l'infini.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = M_n(\mathbf{C})$. La matrice identité de E est notée I_n.

Soit $F = (f_{ij})$ la matrice de E définie par : $\begin{cases} \forall\ i \in \{1,...,n-1\},\ f_{i,i+1} = 1 \\ f_{n,1} = 1 \\ fij = 0 \ \text{sinon} \end{cases}$

Question 1.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de F.

On note $\{\lambda_k\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ les valeurs propres de F.

2. La matrice F est-elle diagonalisable dans E ? La matrice F est-elle inversible ?

3. Soit $G = \{\ F^p,\ p \in \mathbf{Z}\ \}$.

Montrer que G est un groupe cyclique d'ordre n pour la multiplication des matrices.

Préciser tous les éléments générateurs du groupe G.

4. Déterminer la dimension et une base de $Vect(G)$.

5. Calculer la trace d'un élément de G.

Question 2.

Soit le polynôme $p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $A = p(F)$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de la matrice A est :

$$\left\{\ \frac{n(n+1)}{2}\ \right\} \cup \left\{\ \frac{n}{\lambda_k - 1}\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\ \right\}.$$

2. Vérifier que : $\det(A) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n+1)\ n^{n-1}}{2}$.

Question 3.

On se propose dans cette question de déterminer l'inverse de la matrice A.

1. Prouver que : $A^{-1} \in Vect\left(\{A^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}\right)$.

2. En déduire qu'il existe des scalaires $(u_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k\ F^k$.

3. Montrer que : $(F - I_n)^2\ A = n\ (F - I_n)$.

4. Prouver que : $\begin{cases} u_2 = u_3 = \ \ldots\ = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Tournez la page S.V.P

5. En calculant de deux façons différentes la trace de la matrice A^{-1}, déterminer la valeur de u_0.

6. En déduire A^{-1}.

Fin de l'épreuve.