

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite u est strictement positive et décroissante de limite nulle, on sait que le signe de la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est le signe de son premier terme ou encore le signe de R_n est $(-1)^n$. On en déduit que

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^n R_n + (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n (R_n - R_{n+1}) = (-1)^n \times (-1)^n u_n = u_n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n R_n - (-1)^{n+1} R_{n+1} = (-1)^n (R_n + R_{n+1}) \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\ &= (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p} u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p+1} u_{n+p+1} \right) \\ &= (-1)^n \times (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} - \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}]. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+p+1}].$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - u_{n+1}$. D'après les conditions iii) et iv), on a pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \geq 0$ et $v_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} \leq u_n - u_{n+1} = v_n$. Ainsi, la suite v est une suite positive décroissante, de limite nulle.

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p [u_{p+n} - u_{p+n+1}] = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p v_{n+p}$ est du signe de son premier terme $(-1)^0 v_n$ ou encore $|R_n| - |R_{n+1}| \geq 0$. On a montré que

la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, d'après la question 1., on a

$$u_n = |R_n| + |R_{n+1}| \leq |R_n| + |R_n| = 2|R_n|,$$

et aussi

$$u_{n-1} = |R_n| + |R_{n-1}| \geq |R_n| + |R_n| = 2|R_n|.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{R_n}{(-1)^n u_n / 2} = \frac{2(-1)^n R_n}{u_n} = \frac{2|R_n|}{u_n}$. Mais alors d'après la question précédente

$$1 \leq \frac{R_n}{(-1)^n u_n / 2} = \frac{2|R_n|}{u_n} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

Puisque par hypothèse, $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\frac{R_n}{(-1)^n u_n / 2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n u_n}{2}.$$

5. Application : La suite $u = \left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est définie et strictement positive à partir du rang 2, de limite nulle en $+\infty$. De plus, $u_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} = u_n$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ puis } f''(x) = \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}.$$

f' est négative sur $[e, +\infty[$ et en particulier sur $[3, +\infty[$ et f'' est positive sur $[e^{3/2}, \infty[$ et en particulier sur $[5, +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $[3, +\infty[$ et convexe sur $[5, +\infty[$.

Pour $n \geq 3$, on a alors $u_n = f(n) \geq f(n+1) = u_{n+1}$. La suite (u_n) décroît à partir du rang 3. D'autre part, par convexité de f sur $[5, +\infty[$, pour $n \geq 5$ on a $\frac{1}{2}(f(n) + f(n+2)) \geq f\left(\frac{n+n+2}{2}\right) = f(n+1)$ ce qui s'écrit encore $u_{n+2} + u_n \geq 2u_{n+1}$ ou enfin $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

L'encadrement établi à la question 3. est donc vrai à partir du rang 6 et l'équivalent fourni à la question 4. reste valable. Ainsi,

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice 2.

1. Puisque $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$, on a $R_b = R_a = +\infty$ et donc

g est définie sur \mathbb{R} .

2. Puisque $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et que la suite b ne s'annule pas, la suite $(\gamma_n) = \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$ est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. **3.1.** Soit $m \in \mathbb{N}$. La suite γ est convergente et en particulier bornée. On en déduit l'existence de $\delta_m = \sup_{n \geq m} |\gamma_n|$.

3.2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$. On a $g(t) \geq b_0 > 0$ et

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| &= \frac{1}{g(t)} |f(t) - g(t)| = \frac{1}{g(t)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) t^n \right| = \frac{1}{g(t)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n b_n t^n \right| \\ &\leq \frac{1}{g(t)} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |\gamma_n| b_n t^n + \frac{1}{g(t)} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n \leq \frac{\sup_{n \geq m} |\gamma_n|}{g(t)} \sum_{n=m+1}^{+\infty} b_n t^n + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n \\ &\leq \frac{\delta_m}{g(t)} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n = \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n. \end{aligned}$$

3.3. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (γ_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut choisir $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m, |\gamma_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. m est ainsi dorénavant fixé. Par définition de m on a $\delta_m \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\forall t > 0, \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n.$$

Maintenant la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n$ est un polynôme de degré au plus m et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n = 0$.

Par suite, il existe un réel strictement positif A tel que, pour $t > A$, $\frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}} \sum_{n=0}^m |\gamma_n| b_n t^n < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $t > A$, on a alors

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall t \in \mathbb{R}, (t > A \Rightarrow \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon)$ et donc que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ ou encore que

$$\frac{f(t)}{g(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

4. 4.1 Quand n tend vers $+\infty$, $(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n+1}{n+1} = 1$ et donc $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}$ tend vers

e. Ainsi, les suites a et b définies par $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{e}{n!}$ sont deux suites strictement positives, équivalentes en $+\infty$. Comme $R_a = +\infty$, on a $R_b = +\infty$ ou encore

h est définie sur \mathbb{R} .

4.2. De plus, la question 3. permet d'affirmer que quand t tend vers $+\infty$

$$h(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!} t^n = e \times e^t = e^{t+1}.$$

$$h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t+1}.$$

5. 5.1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $R_a > 0$. Pour $t \in]-R_a, R_a[$, posons $z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Tout d'abord, $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. D'autre part, pour $t \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned} tz''(t) + (1-t)z'(t) &= t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + (1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - n a_n) t^n \end{aligned}$$

Par suite, par unicité des coefficients d'une série entière, z est solution sur $] -R_a, R_a[$ du problème posé si et seulement si $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 a_{n+1} - n a_n = 0$.

En résumé, sous l'hypothèse $R_a > 0$, z est solution sur $] -R_a, R_a[$ du problème posé si et seulement si $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n$. Maintenant, pour une telle suite, il est clair par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$ et de plus $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La règle de d'ALEMBERT permet d'affirmer que $R_a = +\infty$ ce qui valide les calculs précédents.

(E) admet une et une seule solution z développable en série entière telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = t + \sum_{n \geq 2} a_n t^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n.$$

Déterminons alors la suite a_n . Pour n entier supérieur ou égal à 2, on a

$$a_n = \frac{n-1}{n!^2} \times \frac{n-2}{(n-1)!} \times \dots \times \frac{1}{2^2} \times a_1 = \frac{(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n \times n!}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n \times n!}.$$

5.2. Pour tout réel $t > 0$,

$$z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{t}.$$

$$\forall t > 0, z'(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

5.3 Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n \cdot n!} \sim \frac{1}{(n+1)!}$ et la question 3. permet d'affirmer que quand t tend vers $+\infty$,

$$z(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t} \sim \frac{e^t}{t}.$$

$$z(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}.$$

Exercice 3.

Question 1.

1.

$$\chi_F = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -X \end{vmatrix}$$

$$= -X \times (-X)^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1 \text{ (en développant suivant la première colonne)} \\ = (-1)^n (X^n - 1).$$

$$\chi_F = (-1)^n (X^n - 1).$$

Les valeurs propres de F sont les n racines n -èmes de l'unité dans \mathbb{C} à savoir les $\lambda_k = e^{2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n$.

2. F a n valeurs propres simples et est donc diagonalisable dans \mathbb{C} . 0 n'est pas valeur propre de F et donc F est inversible.

3. • Puisque F est inversible, F^p existe pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

• G est déjà un groupe monogène. Il reste à vérifier que G est fini, d'ordre n .

• Le polynôme minimal μ_F de F est un diviseur unitaire de $\chi_f = (-1)^n (X^n - 1)$ admettant chaque λ_k pour racine. On en déduit que

$$\mu_F = X^n - 1.$$

En particulier, $F^n = I_n$ et $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $F^p \neq I_n$ (*).

- On sait alors que le groupe (G, \times) est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et donc

G est un groupe cyclique d'ordre n .

Les entiers p tels que F^p engendre le groupe (G, \times) sont aussi les entiers p tels que \hat{p} engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ c'est-à-dire les entiers relatifs p premiers à n .

4. D'après ce qui précède, $\text{Vect}(G) = \text{Vect}(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ ce qui montre déjà que $\dim(\text{Vect}(G)) \leq n$. Montrons que la famille $(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est libre.

Mais s'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p F^p = 0$, le polynôme $\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p X^p$ est un polynôme non nul de degré au plus $n-1$ annulateur de F ce qui contredit le fait que $\mu_F = X^n - 1$. Donc la famille $(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est libre et finalement

la famille $(F^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base de G et $\dim(\text{Vect}(G)) = n$.

5. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à F . Avec la convention $e_{n+1} = e_1, e_{n+2} = e_2, \dots, e_{2n} = e_n$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = e_{i+1},$$

et donc plus généralement

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^p(e_i) = e_{i+p}.$$

En particulier, si $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, les coefficients diagonaux de F^p sont tous nuls et donc $\text{Tr}(F^p) = 0$. D'autre part, $\text{Tr}(F^0) = \text{Tr}(I_n) = n$ et donc

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{Tr}(F^p) = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq p \leq n-1 \end{cases}$$

Question 2.

1. Puisque $\text{Sp}(F) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on sait que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(p(F)) = (p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$. Or

$$p(\lambda_k) = p(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p \sum_{k=1}^n kX^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^n X^k \right)' \\ &= \left(\frac{X^{n+1} - 1}{X - 1} \right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1} - 1)}{(X-1)^2} \\ &= \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}. \end{aligned}$$

Soit alors $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a $\lambda_k \neq 1$ et $\lambda_k^n = 1$. Donc

$$\begin{aligned} p(\lambda_k) &= \frac{n\lambda_k^{n+1} - (n+1)\lambda_k^n + 1}{(\lambda_k - 1)^2} = \frac{n\lambda_k^{n+1} - (n+1)\lambda_k^n + 1}{(\lambda_k - 1)^2} = \frac{n\lambda_k - (n+1) + 1}{(\lambda_k - 1)^2} \frac{n(\lambda_k - 1)}{(\lambda_k - 1)^2} \\ &= \frac{n}{\lambda_k - 1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{Sp}(A) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{\lambda_1 - 1}, \dots, \frac{n}{\lambda_{n-1} - 1} \right).$$

2. Le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres (chaque valeur propre étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité). Donc

$$\det(A) = \frac{n(n+1)}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\lambda_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - 1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - X) &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (X - \lambda_k) = (-1)^{n-1} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k)}{X - 1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{X^n - 1}{X - 1} = (-1)^{n-1} (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1), \end{aligned}$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1} (1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1 + 1) = (-1)^{n-1} n.$$

Finalement,

$$\det(A) = \frac{n^n(n+1)}{2} \times \frac{1}{(-1)^{n-1} n} = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

$$\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.}$$

Question 3.

1. Déjà, 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

Posons $\chi_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $a_n = (-1)^n$ et $a_0 = \det(A) \neq 0$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $\chi_A(A) = 0$ ou

encore $\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$. Mais alors

$$A \left(- \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_0} A^{k-1} \right) = \left(- \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_0} A^{k-1} \right) A = I_n.$$

Par suite $A^{-1} = - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_0} A^{k-1}$ et on a montré que A^{-1} est un polynôme en A de degré au plus $n-1$.

$$\boxed{A^{-1} \in \text{Vect}(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}.}$$

2. A est un polynôme en F et il en est de même de toute puissance de A. Par suite, toute puissance de A est dans $\text{Vect}(G)$ et donc $A^{-1} \in \text{Vect}(G)$. Mais d'après la question 1.4, $\text{Vect}(G) = \text{Vect}(F^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ et donc

$$\boxed{A^{-1} \in \text{Vect}(F^k)_{0 \leq k \leq n-1}.}$$

3. On a vu que $(X-1)^2 p = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. En évaluant en F, on obtient (puisque $F^n = I_n$)

$$(F - I_n)^2 A = (F - I_n)^2 p(F) = nF^{n+1} - (n+1)F^n + 1 = nF - (n+1)I_n + I_n = n(F - I_n).$$

$$\boxed{(F - I_n)^2 A = n(F - I_n).}$$

4. On en déduit que $(F - I_n)A^{-1} = \frac{1}{n}(F - I_n)^2$. Or

$$\begin{aligned}(F - I_n)A^{-1} &= (F - I_n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k \\ &= u_{n-1} F^n + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k-1} - u_k) F^k - u_0 I_n = (u_{n-1} - u_0) I_n + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k-1} - u_k) F^k,\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{n}(F - I_n)^2 = \frac{1}{n}I_n - \frac{2}{n}F + \frac{1}{n}F^2.$$

Comme la famille $(F^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient

$$u_{n-1} - u_0 = \frac{1}{n}, u_0 - u_1 = -\frac{2}{n}, u_1 - u_2 = \frac{1}{n} \text{ et } \forall k \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket, u_{k-1} - u_k = 0,$$

et en particulier

$$\begin{aligned}u_2 &= u_3 = \dots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 &= \frac{1}{n} \\ u_1 - u_2 &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

5. D'après la question 1.5, pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $\text{Tr}(F^k) = 0$ et donc par linéarité de la trace

$$\text{Tr}(A^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \text{Tr}(F^k) = u_0 \text{Tr}(I_n) = nu_0.$$

D'autre part, les valeurs propres de A^{-1} étant les inverses des valeurs propres de A , d'après la question 2.1 on a aussi

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A^{-1}) &= \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k - 1}{n} = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n} \text{ (car } 1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} = 0) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} - 1 = -\frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = -\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u_0 = \frac{\text{Tr}(A^{-1})}{n} = -\frac{n^2 + n - 2}{n^2(n+1)}.$$

$$u_0 = -\frac{n^2 + n - 2}{n^2(n+1)}.$$

6. Par suite,

$$u_2 = u_0 + \frac{1}{n} = -\frac{n^2 + n - 2}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)},$$

et donc

$$u_2 = u_3 = \dots = u_{n-1} = \frac{2}{n^2(n+1)}.$$

Ensuite,

$$u_1 = u_2 + \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n + 2}{n^2(n+1)}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \left((-n^2 - n + 2)I_n + (n^2 + n + 2)F + \sum_{k=2}^{n-1} F^k \right),$$

ou encore

$$A^{-1} = \frac{1}{n^2(n+1)} \begin{pmatrix} a & b & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 2 \\ 2 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 2 & \dots & 2 & a \end{pmatrix} \text{ où } a = -n^2 + n + 2 \text{ et } b = n^2 + n + 2.$$