Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Partie I

1 - Puisque f est continue sur l'intervalle I et I contient 0, le théorème de CAUCHY permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $\varphi(f)$. On a alors

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ (\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = f(x) &\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{cx}(\varphi(f))'(x) + ce^{cx}\varphi(f)(x) = f(x)e^{cx}\\ &\Rightarrow \forall x \in I,\ (e^{cx}\varphi(f))'(x) = f(x)e^{cx}\\ &\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{cx}\varphi(f)(x) = e^0\varphi(f)(0) + \int_0^x f(t)e^{ct}\ dt\\ &\Rightarrow \forall x \in I,\ e^{cx}\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)e^{ct}\ dt \Rightarrow \forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\ dt.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\ dt.}$$

2 - Par définition $\varphi(f)$ est dérivable sur I et $(\varphi(f))' = -c\varphi(f) + f$. On en déduit que $(\varphi(f))'$ est continue sur I et donc que

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur I.}}$$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in (\mathscr{C}^0(I))^2$. Pour $x \in I$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = e^{cx}\int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{ct}\ dt = \lambda e^{cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\ dt + \mu e^{cx}\int_0^x g(t)e^{ct}\ dt = (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x),$$

et donc $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$. On a montré que

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^0(I)).}$$

Partie II

1 - Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, d'une part f est bornée sur ce segment et d'autre part f et f^2 sont intégrables sur ce segment. On en déduit que $\|f\|_\infty$ et $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ existent dans $\mathbb{R}$. De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\|f\|_1 = \int_{[a,b]} 1 \times |f| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} 1^2}\sqrt{\int_{[a,b]} f^2} = \sqrt{b-a}\|f\|_2,$$

puis

$$\sqrt{b-a}\|f\|_2 = \sqrt{b-a}\sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \leq \sqrt{b-a}\sqrt{\int_{[a,b]} \|f\|_\infty^2} = (b-a)\|f\|_\infty.$$

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty.}$$

2 - Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$ puis $x \in [a,b]$. Notons J l'intervalle $[x,0]$ si $x \leq 0$ et $[0,x]$ si $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}|\varphi(f)(x)| &= e^{-cx}\left|\int_0^x f(t)e^{ct}\,dt\right| \leq e^{-cx}\int_J |f(t)|e^{ct}\,dt \leq e^{-cx}\int_J \|f\|_\infty e^{ct}\,dt \\ &= e^{-cx}\frac{1}{c}|1-e^{cx}| \times \|f\|_\infty = \frac{1}{c}|1-e^{-cx}| \times \|f\|_\infty \leq \frac{1+e^{-cx}}{c}\|f\|_\infty \leq \frac{1+e^{-ca}}{c}\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque la borne supérieure de $|\varphi(f)|$ sur $[a,b]$ est le plus petit des majorants de $|\varphi(f)|$ sur $[a,b]$,

$$\forall x \in [a,b],\ |\varphi(f)(x)| \leq \frac{1+e^{c|a|}}{c}\|f\|_\infty \text{ et donc } \|\varphi(f)\|_\infty \leq \frac{1+e^{c|a|}}{c}\|f\|_\infty.$$

On a montré que

$$\boxed{\exists M_0 \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0\|f\|_\infty.}$$

3 - Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$ puis $x \in [a,b]$. Notons de nouveau J l'intervalle $[x,0]$ si $x \leq 0$ et $[0,x]$ si $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}|\varphi(f)(x)| &= e^{-cx}\left|\int_0^x f(t)e^{ct}\,dt\right| \leq e^{-cx}\int_J |f(t)|e^{ct}\,dt \leq e^{-ca}\int_J |f(t)| \times e^{cb}\,dt \\ &\leq e^{c(b-a)}\int_a^b |f(t)|\,dt = e^{c(b-a)}\|f\|_1.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \forall x \in [a,b],\ |\varphi(f)(x)| \leq A\|f\|_1.}$$

On en déduit encore que pour $f \in \mathscr{C}^0(I)$,

$$\|\varphi(f)\|_1 = \int_a^b |\varphi(f)(x)|\,dx \leq \int_a^b A\|f\|_1\,dx = (b-a)A\|f\|_1.$$

$$\boxed{\exists A' \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_1 \leq A'\|f\|_1.}$$

4 - Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$ puis $x \in [a,b]$. D'après les questions 1. et 3.,

$$|\varphi(f)(x)| \leq A\|f\|_1 \leq AM_1\|f\|_2,$$

et donc

$$\boxed{\exists B \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \forall x \in [a,b],\ |\varphi(f)(x)| \leq B\|f\|_2.}$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$.

$$\|\varphi(f)\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \leq \sqrt{\int_{[a,b]} B^2\|f\|_2^2} = B\sqrt{b-a}\|f\|_2.$$

Donc

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_2 \leq K\|f\|_2.}$$

5 - a), b) et c) D'après la question 2., $\exists M_0 \in \mathbb{R}^+/\ \forall f \in \mathscr{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0\|f\|_\infty$ et puisque φ est linéaire,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}^0(I), \|\ \|_\infty).}$$

De même, les questions 3. et 4. permettent d'affirmer que

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}^0(I), \|\ \|_1)\\ \text{et de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}^0(I), \|\ \|_2).\end{array}}$$

Partie III

1 - Soit $\lambda > 0$. Pour $x \in [0, +\infty[$,

$$\varphi(f_\lambda(x)) = e^{-cx}\int_0^x e^{-\lambda t}e^{ct}\,dt = e^{-cx}\int_0^x e^{(c-\lambda)t}\,dt.$$

• Si $\lambda \neq c$, pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{1}{c-\lambda}e^{-cx}\left[e^{(c-\lambda)t}\right]_0^x = \frac{1}{c-\lambda}e^{-cx}(e^{(c-\lambda)x} - 1) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda}.$$

• Si $\lambda = c$, pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx}\int_0^x dt = xe^{-cx}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\bullet \text{ Si } \lambda \neq c,\ \forall x \in [0, +\infty[,\ \varphi(f_\lambda)(x) = \dfrac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda},\\ \bullet \text{ Si } \lambda = c,\ \forall x \in [0, +\infty[,\ \varphi(f_\lambda)(x) = xe^{-cx}.\end{array}}$$

2 - Dans tous les cas, f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et négligeables en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. Par suite,

$$\boxed{\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ f_\lambda \in L^1(I) \text{ et } \forall \lambda \in]0, +\infty[,\ \varphi(f_\lambda) \in L^1(I).}$$

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

$$\|f_\lambda\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\boxed{\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ \|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}.}$$

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
• Si $\lambda = c$,

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \|\varphi(f_c)\|_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-cx}\,dx = \left[\left(-\frac{x}{c} - \frac{1}{c^2}\right)e^{-cx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{c^2}.$$

• Si $\lambda \neq c$, en discutant suivant le fait que $\lambda > c$ ou $\lambda < c$, on a

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{|c-\lambda|}\int_0^{+\infty} |e^{-\lambda x} - e^{-cx}|\,dx = \frac{1}{|c-\lambda|}\left[-\left|-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-cx}}{c}\right|\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{|c-\lambda|}\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c\lambda}.$$

ce qui reste vrai quand $\lambda = c$.

$$\boxed{\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ \|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{c\lambda}.}$$

3 - Dans tous les cas f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et négligeables en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. Par suite,

$$\boxed{\forall\lambda\in]0,+\infty[,\ f_\lambda\in L^2(I)\text{ et }\forall\lambda\in]0,+\infty[,\ \varphi(f_\lambda)\in L^2(I).}$$

Soit $\lambda\in]0,+\infty[$.

$$\|f_\lambda\|_2=\sqrt{\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda x}\,dx}=\sqrt{\left[-\frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda}\right]_0^{+\infty}}=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

$$\boxed{\forall\lambda\in]0,+\infty[,\ \|f_\lambda\|_2=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.}$$

Soit $\lambda\in]0,+\infty[$.

• Si $\lambda=c$, $\|\varphi(f_\lambda)\|_2=\|\varphi(f_c)\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2e^{-2cx}\,dx}$. Deux intégration par parties fournissent

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-2cx}\,dx&=-\frac{1}{2c}x^2e^{-2cx}+\frac{1}{c}\int xe^{-2cx}\,dx=-\frac{1}{2c}x^2e^{-2cx}-\frac{1}{2c^2}xe^{-2cx}+\frac{1}{2c^2}\int e^{-2cx}\\&=-\frac{1}{2c}x^2e^{-cx}-\frac{1}{2c^2}xe^{-2cx}-\frac{1}{4c^3}e^{-2cx}+C,\end{aligned}$$

et donc

$$\|\varphi(f_\lambda)\|_2=\sqrt{\left[-\frac{1}{2c}x^2e^{-2cx}-\frac{1}{2c^2}xe^{-2cx}-\frac{1}{4c^3}e^{-2cx}\right]_0^{+\infty}}=\sqrt{\frac{1}{4c^3}}=\frac{1}{\sqrt{4c^3}}.$$

• Si $\lambda\neq c$, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi(f_\lambda)\|_2&=\frac{1}{|c-\lambda|}\sqrt{\int_0^{+\infty}(e^{-\lambda x}-e^{-cx})^2\,dx}=\frac{1}{|c-\lambda|}\sqrt{\left[-\frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda}+2\frac{e^{-(\lambda+c)x}}{\lambda+c}-\frac{e^{-2cx}}{2c}\right]_0^{+\infty}}\\&=\frac{1}{|c-\lambda|}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}-2\frac{1}{\lambda+c}+\frac{1}{2c}}=\frac{1}{|c-\lambda|}\sqrt{\frac{c(\lambda+c)-4\lambda c+\lambda(\lambda+c)}{2c\lambda(\lambda+c)}}=\frac{1}{|c-\lambda|}\sqrt{\frac{c^2-2\lambda c+\lambda^2}{2c\lambda(\lambda+c)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}.\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $\lambda=c$.

$$\boxed{\forall\lambda\in]0,+\infty[,\ \|\varphi(f_\lambda)\|_2=\frac{1}{\sqrt{2c\lambda(\lambda+c)}}.}$$

4 - Soit $X>0$.

$$\int_0^X|\varphi(f)(x)|\,dx=\int_0^X\left|e^{-cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\,dt\right|dx\leq\int_0^X\left(\int_0^x|f(t)|e^{ct}e^{-cx}\,dt\right)dx.$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale de la fonction continue $(x,t)\mapsto|f(t)|e^{ct}e^{-cx}$ sur le domaine $\mathscr{D}=\{(x,t)\ \in\mathbb{R}^2/\ 0\leq t\leq x\leq X\}$. D'après le théorème de Fubini, on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^X|\varphi(f)(x)|\,dx&\leq\int_0^X e^{ct}|f(t)|\left(\int_t^X e^{-cx}\,dx\right)dt\\&=\frac{1}{c}\int_0^X e^{ct}|f(t)|(e^{-ct}-e^{-cX})\,dt=\frac{1}{c}\int_0^X|f(t)|(1-e^{-c(X-t)})\,dt\\&\leq\frac{1}{c}\int_0^X|f(t)|\,dt\leq\frac{1}{c}\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt=\frac{1}{c}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto |\varphi(f)(x)|$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et la fonction $X \mapsto \int_0^X |\varphi(f)(x)|\ dx$ est majorée sur $[0, +\infty[$ par $\dfrac{1}{c}\|f\|_1$. On en déduit que la fonction $\varphi(f)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de plus que $\|\varphi(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{c}\|f\|_1$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(I),\ \varphi(f) \in L^1(I) \text{ et } \|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c}\|f\|_1.}$$

On en déduit encore que la restriction de φ à $L^1(I)$ est un endomorphisme de $L^1(I)$, encore noté φ. De plus, φ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé $(L^1(I), \|\ \|_1)$ et $|||\varphi|||_1 \leq \dfrac{1}{c}$ $(*)$.

Maintenant, pour $f = f_1$, on a d'après la question 2. $\|f_1\|_1 = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\|\varphi(f)\|_1 = \dfrac{1}{c \times 1} = \dfrac{1}{c}$ de sorte que l'inégalité $(*)$ est une égalité pour la fonction non nulle f_1. On a montré que

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (L^1(I), \|\ \|_1) \text{ et } |||\varphi|||_1 = \frac{1}{c}.}$$

5 - Soit $X > 0$. Puisque $f = g' + cg$ et que $g(0) = \varphi(f)(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t)g(t)\ dt &= \int_0^X (g'(t) + cg(t))g(t)\ dt = \int_0^X g'(t)g(t)\ dt + c\int_0^X g^2(t)\ dt = \frac{g^2(X) - g^2(0)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ dt \\ &= \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ dt.\end{aligned}$$

Mais alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$c\int_0^X g^2(t)\ dt = -\frac{g^2(X)}{2} + \int_0^X f(t)g(t)\ dt \leq \int_0^X f(t)g(t)\ dt \leq \sqrt{\int_0^X g^2(t)\ dt}\sqrt{\int_0^X f^2(t)\ dt} \leq \|f\|_2\sqrt{\int_0^X g^2(t)\ dt},$$

et, que $\sqrt{\int_0^X g^2(t)\ dt}$ soit nul ou pas, on en déduit

$$\forall X > 0,\ c\sqrt{\int_0^X g^2(t)\ dt} \leq \|f\|_2.$$

De nouveau, la fonction la fonction $x \mapsto \varphi(f)^2(x)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et la fonction $X \mapsto \int_0^X \varphi(f)^2(x)\ dx$ est majorée sur $[0, +\infty[$ par $\dfrac{1}{c^2}\|f\|_2^2$. On en déduit que la fonction $\varphi(f)^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ou encore que $\varphi(f) \in L^2(I)$ et de plus que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \dfrac{1}{c}\|f\|_2$.

$$\boxed{\forall f \in L^2(I),\ \varphi(f) \in L^2(I) \text{ et } \|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c}\|f\|_2.}$$

On en déduit encore que la restriction de φ à $L^2(I)$ est un endomorphisme de $L^2(I)$, encore noté φ. De plus, φ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé $(L^2(I), \|\ \|_2)$ et $|||\varphi|||_2 \leq \dfrac{1}{c}$.

Enfin, pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{1/\sqrt{2\lambda}}{1/\sqrt{2c\lambda(\lambda + c)}} = \frac{1}{\sqrt{c(c + \lambda)}}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{c(c + \lambda)}} = \dfrac{1}{c}$, on a finalement

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé } (L^2(I), \|\ \|_2) \text{ et } |||\varphi|||_2 = \frac{1}{c}.}$$

Partie IV

1 - Soit $f \in G$.
La fonction f est développable en série entière sur $]-R, R[$. Puisque la fonction $t \mapsto e^{ct}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-R, R[$, on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{ct}f(t)$ est développable sur $]-R, R[$ (au moins) puis que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{ct}f(t)\, dt$ est développable sur $]-R, R[$ et finalement que la fonction $x \mapsto e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)\, dt$ est développable en série entière sur $]-R, R[$ (au moins). Ainsi, si $f \in G$, $\varphi(f) \in G$.

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(G).}$$

2 - Puisque $\varphi(f)$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, on sait que $\varphi(f)$ est dérivable sur $]-R, R[$ et sur la dérivée de $\varphi(f)$ s'obtient par dérivation terme à terme. Pour $x \in]-R, R[$, on a alors

$$(\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n + c\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n = \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)b_{n+1} + cb_n)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R, R[,\ (\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = f(x) &\Rightarrow \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)b_{n+1} + cb_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)b_{n+1} + cb_n = a_n \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!b_{n+1}}{c^{n+1}} - \frac{(-1)^n n! b_n}{c^n} = \frac{(-1)^{n+1}n!a_n}{c^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. En tenant compte de $b_0 = \varphi(f)(0) = 0$, on a

$$\frac{(-1)^n n! b_n}{c^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!b_k}{c^{k+1}} - \frac{(-1)^k k! b_k}{c^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}k!a_k}{c^{k+1}},$$

et donc

$$b_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k!(-c)^{n-1-k}a_k.$$

$$\boxed{b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}k!(-c)^{n-1-k}a_k.}$$

Partie V

1 - a) Soit $(f, g) \in (H(I))^2$. Les fonctions fg et $f'g'$ sont continues sur I. De plus, à partir des inégalités $(f \pm g)^2 \geq 0$ et $(f' \pm g')^2 \geq 0$, on obtient $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ et $|f'g'| \leq \frac{1}{2}(f'^2 + g'^2)$. Puisque f^2, g^2, f'^2 et g'^2 sont intégrables sur I, les fonctions fg et $f'g'$ le sont également.

$$\boxed{\forall (f, g) \in (H(I))^2,\ fg \in H(I) \text{ et } f'g' \in H(I).}$$

b) • D'après la question a), ϕ est une application de $(H(I))^2$ dans $\mathbb{R}$.
• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de ϕ sont claires.
• Soit $f \in H(I)$.

$$\begin{aligned}
\phi(f, f) = 0 \Rightarrow \int_I f^2 + \int_I f'^2 = 0 \Rightarrow \int_I f^2 = 0 \\
\Rightarrow f^2 = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\
\Rightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

En résumé, ϕ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$$\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire sur } H(I).}$$

c) Pour $f \in H(I)$, $\phi(f,f) = \|f\|_H^2$. Ceci montre que $\|\ \|_H$ est la norme associée au produit scalaire ϕ et en particulier que

$$\boxed{\|\ \|_H \text{ est une norme sur } H(I).}$$

2 - a) Soit $f \in L^2(I)$. Puisque par hypothèse, φ est endomorphisme de $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est encore dans $L^2(I)$. Mais alors, puisque $L^2(I)$ est un espace vectoriel, $(\varphi(f))' = f - c\varphi(f) \in L^2(I)$. On en déduit que $\varphi(f)$ est dans $H(I)$ et puisque $\varphi(f)(0) = 0$, $\varphi(f) \in K$.

$$\boxed{\forall f \in L^2(I)(I),\ \varphi(f) \in K.}$$

Soit $f \in L^2(I)$. Puisque φ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé $(L^2(I), \|\ \|_2)$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \alpha\|f\|_2$. Mais alors

$$\|(\varphi(f))'\|_2 = \| - c\varphi(f) + f\|_2 \leq c\|\varphi(f)\|_2 + \|f\|_2 \leq (1 + c\alpha)\|f\|_2.$$

On en déduit que

$$\|\varphi(f)\|_H = \sqrt{\|\varphi(f)\|_2^2 + \|(\varphi(f))'\|_2^2} \leq \sqrt{\alpha^2\|f\|_2^2 + (1+c\alpha)^2\|f\|_2^2} = \sqrt{\alpha^2 + (1+c\alpha)^2}\|f\|_2.$$

On a montré que

$$\boxed{\exists A > 0/\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2.}$$

b) La restriction de φ à $L^2(I)$ est encore notée φ.
- D'après la question a), φ est une application linéaire de $L^2(I)$ dans K.
- Soit $f \in L^2(I)$.

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow \varphi(f) = 0 \Rightarrow f = (\varphi(f))' + c\varphi(f) = 0.$$

Donc, φ est injectif.

- Soit $g \in K$. Posons $f = g' + cg$. Par hypothèse g est dans K et donc g et g' sont dans $L^2(I)$. Il en est de même de f. De plus, puisque $g(0) = 0$ et que $g' + cg = f$, on a $g = \varphi(f)$. On a montré que $\forall g \in K,\ \exists f \in L^2(I)/\ \varphi(f) = g$ et donc φ est surjective.

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } L^2(I) \text{ sur } H(I).}$$

c) D'après la question a), $\exists A > 0/\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$ et puisque φ est linéaire

$$\boxed{\varphi \text{ est continue de } (L^2(I), \|\ \|_2) \text{ dans } (K, \|\ \|_H).}$$

d) D'après la question b), $\forall g \in K$, $\varphi^{-1}(g) = g' + cg$. Mais alors, pour $g \in K$,

$$\|\varphi^{-1}(g)\|_2 = \|g' + cg\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2 \leq \|g\|_H + c\|g\|_H = (1+c)\|g\|_H.$$

Puisque φ^{-1} est linéaire, ceci montre que

$$\boxed{\varphi^{-1} \text{ est continue de } (K, \|\ \|_H) \text{ dans } (L^2(I), \|\ \|_2)\ .}$$

Partie VI

1 - Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que les solutions de l'équation $y' + cy = f$ (E) constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. La méthode de LAGRANGE fournit les solutions de cette équation. Ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-cx} + e^{-cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\ dt,\ C \in \mathbb{R}.$$

Soit y une telle solution. La fonction $z\ :\ x \mapsto y(x+2\pi)$ est également solution de l'équation (E) (car pour x réel, $\frac{d}{dx}(y(x+2\pi)) + cy(x+2\pi) = y'(x+2\pi) + cy(x+2\pi) = f(x+2\pi) = f(x)$). Par suite, d'après le théorème de CAUCHY,

$$\begin{aligned} y \text{ est } 2\pi\text{-périodique } &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = z(x) \Leftrightarrow y(0) = z(0) \Leftrightarrow y(2\pi) = y(0) \\ &\Leftrightarrow Ce^{-2c\pi} + e^{-2c\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ct}\ dt = C \Leftrightarrow C = \frac{e^{-2c\pi}}{1-e^{-2c\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ct}\ dt. \end{aligned}$$

L'équation $y' + cy = f$ admet une solution continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et une seule à savoir la fonction $\psi(f)$ définie par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \left(\frac{e^{-2c\pi}}{1-e^{-2c\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ct}\ dt\right)e^{-cx} + e^{-cx}\int_0^x f(t)e^{ct}\ dt.}$$

ψ est bien une application de E dans F. De la même façon qu'en I.2., on démontre alors que ψ est linéaire et de la même façon qu'en V.2.b), que ψ est bijective.

$$\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F.}$$

2 - Soit $f \in E$. D'après la question I.2., $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de $\psi(f)$. On sait alors que pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k((\psi(f))') = ikc_k(\psi(f)).$$

Par linéarité des coefficients de FOURIER, on a alors pour $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(f) = c_k((\psi(f))' + c\psi(f)) = c_k((\psi(f))') + cc_k(\psi(f)) = (c+ik)c_k(\psi(f)) = (c+ik)d_f(f),$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ d_k(f) = \frac{c_k(f)}{c+ik}.}$$

En particulier, $|d_k(f)| = \dfrac{\|c_k(f)|}{\sqrt{c^2+k^2}}$.

3 - Soit $f \in E$. La fonction f est continue par morceaux et 2π-périodique. D'après le théorème de PARSEVAL, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < +\infty$ et de plus

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\ dt = \|f\|_E^2.$$

Soit $g \in F$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(g') = ikc_k(g)$ et donc

$$\int_0^{2\pi} g'^2(t)\ dt + \int_0^{2\pi} g'^2(t)\ dt = 2\pi\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k(g)|^2\right) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k(g)|^2.$$

Par suite,

$$\boxed{\forall g \in F,\ \|g\|_F = \sqrt{2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k(g)|^2}.}$$

Mais alors, pour $f \in E$, d'après la question 2., on a

$$\|\psi(f)\|_F = \sqrt{2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k(\psi(f))|^2} = \sqrt{2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1+k^2}{c^2+k^2}|c_k(f)|^2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons alors $u(x) = \dfrac{1+x^2}{c^2+x^2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = \frac{2x(c^2+x^2) - 2x(1+x^2)}{(c^2+x^2)^2} = \frac{2x(c^2-1)}{(c^2+x^2)^2}.$$

• Si $0 \leq c \leq 1$, u est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1+k^2}{c^2+k^2} = u(|k|) \leq u(0) = \dfrac{1}{c^2}$.

• Si $c > 1$, u est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1+k^2}{c^2+k^2} = u(|k|) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$.

Dans tous les cas, on a $\text{Min}\left\{1, \dfrac{1}{c^2}\right\} \leq \dfrac{1+k^2}{c^2+k^2} \leq \text{Max}\left\{1, \dfrac{1}{c^2}\right\}$ et donc

$$\|\psi(f)\|_F = \sqrt{2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1+k^2}{c^2+k^2} |c_k(f)|^2} \leq \sqrt{\text{Max}\left\{1, \frac{1}{c^2}\right\}} \sqrt{2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2} = \text{Max}\left\{1, \frac{1}{c}\right\} \|f\|_E.$$

et de même $\|\psi(f)\|_F \geq \text{Min}\left\{1, \dfrac{1}{c}\right\} \|f\|_E$.

$$\boxed{\forall f \in E,\ \text{Min}\left\{1, \frac{1}{c}\right\} \|f\|_E \leq \|\psi(f)\|_F \leq \text{Max}\left\{1, \frac{1}{c}\right\} \|f\|_E.}$$

4 - L'inégalité de droite montre alors que ψ est continue sur E et l'inégalité de gauche réecrite sous la forme

$$\forall g \in F,\ \|\psi^{-1}(g)\|_E \leq \frac{1}{\text{Min}\left\{1, \frac{1}{c}\right\}} \|g\|_F,$$

montre que ψ^{-1} est continue sur F.

$$\boxed{\psi \text{ est continue sur } E \text{ et } \psi^{-1} \text{ est continue sur } F.}$$

