Epreuve de Mathématiques A PC

Préliminaires

1. Soit i un entier naturel supérieur ou égal à 2. Les deux fonctions $u \mapsto -\cos u$ et $u \mapsto (\sin u)^{i-1}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)^i \, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)(\sin u)^{i-1} \, du \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(-\cos u)(\sin u)^{i-1}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + (i-1)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos u)^2(\sin u)^{i-2} \, du = (i-1)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-(\sin u)^2)(\sin u)^{i-2} \, du \\ &= (i-1)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)^{i-2} \, du - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin u)^i\right) \\ &= (i-1)(\alpha_{i-2} - \alpha_i),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ \alpha_i = \frac{i-1}{i}\alpha_{i-2}.}$$

2. $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = 1$ et $\alpha_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin u \, du = 0$ car la fonction $u \mapsto \sin u$ est impaire. De la question 1., on en déduit déjà par récurrence que si i est impair, $\alpha_i = 0$. Si maintenant i est un entier pair supérieur ou égal à 2,

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i}\alpha_{i-2} = \frac{i-1}{i} \times \frac{i-3}{i-2} \times \ldots \times \frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{(i-1)(i-3)\ldots 1}{i(i-2)\ldots 2}.$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair}, \\ \dfrac{(i-1)(i-3)\ldots 1}{i(i-2)\ldots 2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}.}$$

Partie I

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Sur I, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est équivalente à l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{f(x)}{1-x^2}.$$

Puisque f est de classe C^∞ sur I, les deux fonctions $x \mapsto -\frac{x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{f(x)}{1-x^2}$ sont continues sur I en tant que quotients de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Puisque $0 \in]-1, 1[$, le théorème de CAUCHY permet alors d'affirmer qu'il existe une solution φ de l'équation $(\mathcal{E}_f)$ sur I et une seule telle que $\varphi(0) = y_0$.

2. Soit y une solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur I. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, y est de classe C^n sur I.

- y est par définition dérivable sur I et en particulier de classe C^0 sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que y soit de classe C^n sur I. Puisque f est de classe C^∞ sur I, f est de classe C^n sur I et il en est de même de

$$y' = \frac{x}{1-x^2}y + \frac{1}{1-x^2}f.$$

Ainsi, y' est de classe C^n sur I ou encore y est de classe C^{n+1} sur I.

On a montré par récurrrence que, pour tout entier naturel n, y est de classe C^n sur I et donc y est de classe C^∞ sur I.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_f) \text{ sur I sont de classe } C^\infty \text{ sur I.}}$$

3. (a) Soit y une fonction dérivable sur I.

$$y \text{ solution de } (\mathcal{E}_0) \text{ sur }]-1,1[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1-x^2}y'(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (\sqrt{1-x^2}y)'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1-x^2}y(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ y(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_0) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},\ C \in \mathbb{R}.}$$

(b) Soit y une fonction dérivable sur I.

$$y \text{ solution de } (\mathcal{E}_f) \text{ sur }]-1,1[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)y'(x) - xy(x) = f(x)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1-x^2}y'(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (\sqrt{1-x^2}y)'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1-x^2}y(x) = C + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-1,1[,\ y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(C + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right).$$

La condition $\varphi(0) = y_0$ fournit alors $C = y_0$.

$$\boxed{\forall x \in \text{I},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(y_0 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right).}$$

(c) En particulier, quand f est la fonction $x \mapsto 1$, on obtient

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_1) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto \frac{\text{Arcsin}\,x + C}{\sqrt{1-x^2}},\ C \in \mathbb{R}.}$$

Partie II

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_m[X] \setminus \{0\}$. On note n le degré de P.
• Si $n = 0$, $\Delta(P) = -XP$ est un polynôme de degré $1 = n+1$.
• Si $n \geq 1$, $(1-X^2)P'$ et $-XP$ sont des polynômes de degré $n+1$. $\Delta(P)$ est donc un polynôme de degré au plus $n+1$. De plus, le coefficient de X^{n+1} dans $\Delta(P)$ vaut :

$$-n\text{dom}(P) - \text{dom}(P) = -(n+1)\text{dom}(P) \neq 0.$$

On en déduit que $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $n+1$ exactement.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}_m[X] \setminus \{0\},\ \Delta(P) \text{ est un polynôme de degré } 1 + \deg(P).}$$

Ce résultat reste vrai quand $P = 0$ (puisque $-\infty + 1 = -\infty$).

2. Montrons que Δ est linéaire. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (1-X^2)(\lambda P + \mu Q)' - X(\lambda P + \mu Q) = \lambda((1-X^2)P' - XP) + \mu((1-X^2)Q' - XQ) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).$$

Donc, Δ est linéaire. D'autre part, d'après ce qui précède, pour $m \in \mathbb{N}$ donné, la restriction de Δ à $\mathbb{R}_m[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$ de sorte que Δ induit une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$ que l'on note Δ_m.

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après la question 1., si P est un polynôme non nul de degré au plus m, $\Delta_m(P)$ est un polynôme de degré $1+\deg(P)$ et en particulier, $\Delta_m(P)$ est un polynôme non nul. Le noyau de Δ_m est donc nul et on a montré que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \Delta_m \text{ est injective.}}$$

4. Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(\Delta_m) = \dim(\mathbb{R}_m[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_m)) = m+1-0 = m+1.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \mathrm{rg}(\Delta_m) = m+1.}$$

5. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $\Delta(1) = -X$ et pour $k \in [\![1, m]\!]$,

$$\Delta(X^k) = (1-X^2)(kX^{k-1}) - X(X^k) = -(k+1)X^{k+1} + kX^{k-1}.$$

On en déduit la matrice A_m de Δ_m relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_{m+1}[X]$:

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -2 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & m \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & -(m+1) \end{pmatrix} \in M_{m+2,m+1}(\mathbb{R}).}$$

6. Si l'équation $\mathcal{E}(f)$ admet une solution polynômiale P alors, pour tout réel x, $f(x) = (1-x^2)P'(x) - xP(x)$ et f est nécessairement une fonction polynômiale. De plus, $f = \Delta(P)$. Réciproquement, si $f = \Delta(P)$, alors P est solution de $(\mathcal{E}_f)$.

7. (a) U (resp. V) est la matrice colonne représentant P (resp. Q) dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) et A_{n-1} est la matrice de Δ_{n-1} relativement à ces bases. Donc, d'après la question précédente,

$$P \text{ est solution de } (\mathcal{E}_Q) \Leftrightarrow \Delta(P) = Q \Leftrightarrow \Delta_{n-1}(P) = Q \Leftrightarrow A_{n-1}U = V.$$

(b) Immédiat d'après ce qui précède.
vspace0,2cm
(c) i.

$$A_3S = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = q_0 \\ -p_0 + 2p_2 = q_1 \\ -2p_1 + 3p_3 = q_2 \\ -3p_2 + p_4 = q_3 \\ -4p_3 = q_4 \end{array} \right. .$$

ii.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = q_0 \\ -p_0 + 2p_2 = q_1 \\ -2p_1 + 3p_3 = q_2 \\ -3p_2 = q_3 \\ -4p_3 = q_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = q_0 \\ p_3 = \dfrac{1}{3}(2q_0 + q_2) \\ p_2 = -\dfrac{1}{2}q_3 \\ p_0 = -q_1 - q_3 \\ -\dfrac{4}{3}(2q_0 + q_2) = q_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = q_0 \\ p_3 = \dfrac{1}{3}(2q_0 + q_2) \\ p_2 = -\dfrac{1}{2}q_3 \\ p_0 = -q_1 - q_3 \\ 8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Ce dernier système a une solution si et seulement si la dernière condition est réalisée c'est-à-dire $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$.

iii. Si donc $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$ le système $A_3S = V$ admet une et une seule solution à savoir

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(-q_1 - q_3, q_0, -\frac{1}{2}q_3, \frac{1}{3}(2q_0 - \frac{1}{4}(8q_0 + 3q_4))\right) = \left(-q_1 - q_3, q_0, -\frac{1}{2}q_3, -\frac{1}{4}q_4\right)$$

ce qui fournit

$$\boxed{P = -(q_1 + q_3) + q_0X - \frac{q_3}{2}X^2 - \frac{q_4}{4}X^3.}$$

iv. La condition $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$ est une équation de $\mathrm{Im}(\Delta_3)$ qui est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$.

(d) Soient $(R_1, R_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_n(a_1R_1+a_2R_2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a_1R_1+a_2R_2)(\sin u)\ du = a_1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_1(\sin u)\ du+a_2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_2(\sin u)\ du = a_1\lambda_n(R_1)+a_2\lambda_n(R_2).$$

Ainsi, λ_n est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\lambda_n(1) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \pi \neq 0$ et puisque $1 \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n \text{ est une forme linéaire non nulle.}}$$

ii. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(\Delta_n(P)) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((1 - \sin^2 u)P'(\sin u) - \sin u P(\sin u))\ du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 u P'(\sin u) - \sin u P(\sin u))\ du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u P'(\sin u)\ du + [\cos u P(\sin u)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u P'(\sin u)\ du = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \lambda_{n+1}(\Delta_n(P)) = 0.}$$

iii. D'après ii., $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathrm{Ker}(\lambda_{n+1})$. Maintenant, λ_{n+1} est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et son noyau est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Il en est de même de $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ d'après la question 4.
En résumé, $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathrm{Ker}(\lambda_{n+1})$ et $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda_{n+1}))$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathrm{Ker}(\lambda_{n+1}).}$$

iv. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q_kX^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

$$\begin{aligned}Q \in \mathrm{Im}(\Delta_n) &\Leftrightarrow Q \in \mathrm{Ker}(\lambda_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} q_k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin u)^k\ du = 0 \Leftrightarrow \pi\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_kq_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_kq_k = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall Q = \sum_{k=0}^{n+1} q_kX^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ (Q \in \mathrm{Im}(\Delta_n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_kq_k = 0.}$$

(e) D'après (b) et (d)iv.,

$$\boxed{(\mathcal{E}_Q) \text{ admet une solution polynomiale si et seulement si } \sum_{k=0}^{n} \alpha_kq_k = 0.}$$

(f) Quand $n = 4$, on obtient $\alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 + \alpha_4 q_4 = 0$ ou encore $q_0 + \dfrac{1}{2}q_2 + \dfrac{3}{8}q_4 = 0$ ou enfin $8q_0 + 4q_2 + 3q_4 = 0$ qui est la condition obtenue en (c)ii.

Partie III

1. (a) D'après I.3.(b), les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$. On sait qu'il en est de même de leur produit puis de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et finalement de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + C\right)$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{E}_f) \text{ sur }]-1,1[\text{ sont développables en série entière sur }]-1,1[.}$$

(b) i. Soit y une solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1,1[$. Pour $x \in]-1,1[$, posons $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On sait que y est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour $x \in]-1,1[$, on a alors

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'(x) - xy(x) &= (1-x^2)\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1} - x\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} ka_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_k x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} ka_{k-1}x^k = a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}((k+1)a_{k+1} - ka_{k-1})x^k.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)y'(x) - xy(x) = f(x) &\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[,\ a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}((k+1)a_{k+1} - ka_{k-1})x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = b_0 \\ \forall k \geq 1,\ (k+1)a_{k+1} - ka_{k-1} = b_k \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = b_0 \\ \forall k \geq 1,\ a_{k+1} = \dfrac{k}{k+1}a_{k-1} + \dfrac{1}{k+1}b_k \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

ii. Soit $k \geq 1$. D'après ce qui précède, $a_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}a_{2k-2} + \dfrac{1}{2k}b_{2k-1}$. Avec le préliminaire, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}} &= \frac{(2k)(2k-2)\ldots 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}\left(\frac{2k-1}{2k}a_{2k-2} + \frac{1}{2k}b_{2k-1}\right) = \frac{(2k-2)\ldots 2}{(2k-3)\ldots 1}a_{2k-2} + \frac{(2k-2)\ldots 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}b_{2k-1} \\
&= \frac{a_{2k-2}}{\alpha_{2k-2}} + \frac{1}{2k-1}\frac{b_{2k-1}}{\alpha_{2k-2}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a_{2k}}{\alpha_{2k}} = \frac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}} + \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}.}$$

iii. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \dfrac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$. On a donc $u_0 = a_0$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $u_k = u_{k-1} + \dfrac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$.
Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2p}}{\alpha_{2p}} &= u_p = u_0 + \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k-1}) \text{ (somme télescopique)} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}},
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \alpha_{2p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}\right).}$$

iv. Soit $k \geq 1$. On a aussi $a_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1}a_{2k-1} + \dfrac{1}{2k+1}b_{2k}$ ou encore

$$\begin{aligned}(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k} &= \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{(2k)(2k-2)\dots 2}\left(2ka_{2k-1} + b_{2k}\right) = (2k-1)\frac{(2k-3)\dots 1}{(2k-2)\dots 2}a_{2k-1} + \frac{(2k-1)\dots 1}{(2k)(2k-2)\dots 2}b_{2k}\\ &= (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2k-2} + b_{2k}\alpha_{2k}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k} = (2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2k-2} + b_{2k}\alpha_{2k}.}$$

v. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = (2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$. On a donc $u_0 = a_1$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $u_k = u_{k-1} + b_{2k}\alpha_{2k}$ et donc pour $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(2p+1)a_{2p+1}\alpha_{2p} = u_p &= u_0 + \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k-1}) \text{ (somme télescopique)}\\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\alpha_{2p+1}}\left(a_1 + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\alpha_{2k}\right).}$$

2. (a) Soit $x \in]-1,1[$. L'application $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et donc sur $[x,1[$.
Maintenant, f est développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 1$. En particulier, f est définie et continue en 1 et donc bornée au voisinage de 1. On en déduit que quand t tend vers 1,

$$\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{f(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O(1) \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche (puisque $-\dfrac{1}{2} > -1$), il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[x,1[$. On en déduit l'existence de $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ puis de $\varphi(x)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

(b) Soit $x \in]-1,1[$. Posons $y_0 = -\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. On a alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + y_0\right),$$

et la question I.(b) montre que

$$\boxed{\varphi \text{ est la solution de } (\mathcal{E}_f) \text{ sur }]-1,1[\text{ telle que } \varphi(0) = -\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.}$$

(c) i. Soit $x \in]-1,1[$. On pose $\theta = \text{Arccos}\, x$ de sorte que $\theta \in]0,\pi[$ et $x = \cos\theta$. Soit $\varepsilon \in]0,1-x[$. En posant $t = \cos u$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\varepsilon}^{x}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\int_{\text{Arccos}(1-\varepsilon)}^{\theta}\frac{f(\cos u)}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\times -\sin u\,du\\ &= -\frac{1}{|\sin\theta|}\int_{\text{Arccos}(1-\varepsilon)}^{\theta}\frac{\sin u}{|\sin u|}f(\cos u)\,du = -\frac{1}{\sin\theta}\int_{\text{Arccos}(1-\varepsilon)}^{\theta}f(\cos u)\,du,\end{aligned}$$

car $\theta \in]0,\pi[$ et donc $\sin\theta > 0$ et aussi $u \in [\text{Arccos}(1-\varepsilon),\theta] \subset]0,\pi[$ et donc $\sin u > 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \varphi(x) = -\frac{1}{\sin\theta}\int_{\text{Arccos}(1-\varepsilon)}^{\theta}f(\cos u)\,du \text{ où } \theta = \text{Arccos}\, x.}$$

ii. La fonction $u \mapsto \cos u$ est continue sur $]-\pi,\pi[$ à valeurs dans $]-1,1[$ et la fonction f est continue sur $]-1,1[$. On en déduit que la fonction $g\ :\ u \mapsto f(\cos u)$ est continue sur $]-\pi,\pi[$. Mais alors, F est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et $F' = g$.

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur }]-\pi,\pi[\text{ et } \forall\theta \in]-\pi,\pi[,\ F'(\theta) = f(\cos\theta).}$$

iii. Pour $x \in]-1,1[$,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sin\theta}F(\theta) = -\frac{\theta}{\sin\theta}\frac{F(\theta)-F(0)}{\theta-0}$$

où $\theta = \text{Arccos}\, x$. Quand x tend vers 1, θ tend vers 0, puis $\dfrac{\theta}{\sin\theta}$ tend vers 1 et $\dfrac{F(\theta)-F(0)}{\theta-0}$ tend vers $F'(0) = f(\cos 0) = f(1)$. Finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\varphi(x) = -f(1).}$$

(d) i. Soit $x \in]-1,1[$. $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\displaystyle\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \dfrac{\text{Arcsin}\, x - \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{\text{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_1^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[-\sqrt{1-t^2}\right]_1^x = \frac{-\sqrt{1-x^2}+0}{\sqrt{1-x^2}} = -1.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_0(x) = -\frac{\text{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \varphi_1(x) = -1.}$$

ii. Soient $k \geq 2$ puis $x \in]-1,1[$. Soit $\varepsilon \in]0,1-x[$. Les deux fonction $t \mapsto t^{k-1}$ et $t \mapsto -\sqrt{1-t^2}$ sont de classe C^1 sur $[x,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_x^{1-\varepsilon}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_x^{1-\varepsilon}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}t^{k-1}\,dt = \left[-\sqrt{1-t^2}t^{k-1}\right]_x^{1-\varepsilon} + (k-1)\int_x^{1-\varepsilon}tk-2\sqrt{1-t^2}\,dt\\ &= -\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}(1-\varepsilon)^{k-1} + \sqrt{1-x^2}x^{k-1} + (k-1)\int_x^{1-\varepsilon}tk-2\sqrt{1-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

On fait tendre ε vers 0 et on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^x\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= -\sqrt{1-x^2}x^{k-1} + (k-1)\int_1^x tk-2\sqrt{1-t^2}\,dt = -\sqrt{1-x^2}x^{k-1} + (k-1)\int_1^x\frac{tk-2(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =\\ &-\sqrt{1-x^2}x^{k-1} + (k-1)\int_1^x\frac{tk-2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - (k-1)\int_1^x\frac{tk}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $\sqrt{1-x^2}$, on obtient $\varphi_k(x) = -x^{k-1} + (k-1)\varphi_{k-2}(x) - \varphi_k(x)$ puis $k\varphi_k(x) = -x^{k-1} + (k-1)\varphi_{k-2}(x)$. Finalement

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \forall x \in]-1,1[,\ \varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k}\varphi_{k-2}(x).}$$

iii. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, φ_p est un polynôme de degré $2p$.

- Si $p = 0$, $\varphi_{2p+1} = \varphi_1 = -1$ et φ_{2p+1} est un polynôme de degré $0 = 2 \times 0$.
- Soit $p \geq 0$. Supposons que φ_{2p+1} soit un polynôme de degré $2p$. Alors, $\varphi_{2p+3} = -\dfrac{X^{2p+2}}{2p+3} + \dfrac{2p+2}{2p+3}\varphi_{2p+1}$ est un polynôme de degré $2p+2$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \varphi_{2p+1} \text{ est un polynôme de degré } 2p.}$$

iv. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = \varphi_k(x)$ et $b_k = -x^k$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors $a_k = \dfrac{k-1}{k}a_{k-2} + \dfrac{1}{k}b_{k-1}$. Le calcul fait en 1.(b).ii. fournit alors

$$\varphi_{2p}(x) = a_{2p} = \alpha_{2p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}\right) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_{2p}x_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}} + \alpha_{2p}\varphi_0(x).$$

Ainsi, il existe un polynôme P_{2p} de degré $2p-1$ tel que $\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x)$.

v. Si k est impair, d'après la question iii., φ_k est un polynôme et en particulier admet une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
Si k est pair, d'après la question iv., φ_k a une limite finie en 1 si et seulement si φ_0 a une limite finie en 1. La question 2.(c) appliquée à la fonction constante $f = 1$ montre que φ_0 tend vers $f(1) = -1$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Finalement,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } \varphi_k \text{ a une limite finie quand } x \text{ tend vers } 1 \text{ par valeurs inférieures.}}$$

(e) Soit $x \in]-1,1[$. Pour $t \in [x,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, posons $f_k(t) = \dfrac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}}$.

- Chaque fonction f_k est continue et intégrable sur $[x,1[$.
- Pour $t \in [x,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k t^k}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_k converge simplement sur $[x,1[$ vers la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est une une fonction continue sur $[x,1[$.
- De plus, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_x^1 |f_k(t)|\,dt = |b_k|\int_x^1 \frac{|t|^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leq |b_k|\int_{-1}^1 \frac{|t|^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leq |b_k|\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \pi|b_k|.$$

Comme la série entière de somme f a un rayon de convergence strictement supérieur à 1, la série numérique de terme général $|b_k|$ est convergente et il en est de même de la série numérique de terme général $\displaystyle\int_x^1 |f_k(t)|\,dt$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on a alors

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \int_x^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

et après inversion des bornes des intégrales et division par $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x)$.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } b_k\varphi_k,\ k \geq 0 \text{ converge simplement vers la fonction } \varphi \text{ sur }]-1,1[.}$$

