SESSION 2004

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice 1

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$g(-x) = e^{-(-x)^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt = e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,(-du) = -e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,du = -g(x).$$

Donc

$$\boxed{g \text{ est impaire.}}$$

2. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de g. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2} \times e^{x^2} = -2xg(x) + 1.$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3. Les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On sait alors que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit alors f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (f-g)'(x) + 2x(f-g)(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2}(f-g)'(x) + 2xe^{x^2}(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}(e^{x^2}(f-g))(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2}(f-g)(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ce^{-x^2} + g(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto Ce^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt,\ C \in \mathbb{R}.}$$

4. (a) On suppose à priori que le rayon R de la série $\sum a_i x^i$ est strictement positif. Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ et on a

$$\begin{aligned}
f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} + 2\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^{i+1} = \sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)a_{i+1}x^i + 2\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i-1}x^i\\
&= a_1 + \sum_{i=1}^{+\infty}((i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1})x^i.
\end{aligned}$$

Mais alors, par unicité des coefficients d'un développement en série entière,

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[\Leftrightarrow a_1 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ (i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N},\ (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) On a $a_1 = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ a_{2i+1} = -\dfrac{2}{2i+1}a_{2i-1}$. Par suite, pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_{2i+1} &= -\frac{2}{2i+1} \times -\frac{2}{2i-1} \times \ldots \times -\frac{2}{3}a_1 = (-1)^i 2^i \frac{1}{(2i+1) \times (2i-1) \times \ldots \times 3} \\
&= (-1)^i 2^i \frac{(2i) \times (2i-2) \times \ldots \times 2}{(2i+1) \times (2i) \times (2i-1) \times \ldots \times 3 \times 2} = (-1)^i 2^i \frac{2^i i!}{(2i+1)!} \\
&= (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $i = 0$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ a_{2i+1} = (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!}.}$$

(c) De même, $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ a_{2i} = -\dfrac{2}{2i}a_{2i-2}$. Par suite, pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2i} = -\frac{2}{2i} \times -\frac{2}{2i-2} \times \ldots \times -\frac{2}{2}a_0 = (-1)^i 2^i \frac{1}{(2i) \times (2i-2) \times \ldots \times 2}a_0 = (-1)^i 2^i \frac{1}{2^i i!}a_0 = \frac{(-1)^i}{i!}a_0,$$

ce qui reste vrai pour $i = 0$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ a_{2i} = \frac{(-1)^i}{i!}a_0.}$$

En particulier, la donnée de a_0 détermine une suite $(a_I)_{i \in \mathbb{N}}$ et une seule.

(d) Réciproquement, soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant : $\forall i \in \mathbb{N},\ (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0$.

D'après ce qui précède, la série entière $\sum a_{2i}x^{2i} = \sum \dfrac{(-1)^i}{i!}a_0 x^{2i}$ a un rayon de convergence infini. D'autre part, pour $x \neq 0$ et $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{2i+1}x^{2i+1}}{a_{2i-1}x^{2i-1}}\right| = \frac{2x^2}{2i+1},$$

et donc $\lim\limits_{i \to +\infty} \left|\dfrac{a_{2i+1}x^{2i+1}}{a_{2i-1}x^{2i-1}}\right| = 0$. La règle de dAlembert permet alors d'affirmer que, pour tout réel x non nul, la série numérique de terme général $a_{2i+1}x^{2i+1}$ converge et donc que la série série entière $\sum a_{2i+1}x^{2i+1}$ a un rayon de convergence infini.

En résumé, les deux séries entières $\sum a_{2i}x^{2i}$ et $\sum a_{2i+1}x^{2i+1}$ ont un rayon de convergence infini et on en déduit que la série entière $\sum a_i x^i$ a un rayon de convergence infini.

$$\boxed{R = +\infty.}$$

(e) Les calculs faits en (a) sont maintenant validés par le fait que $R = +\infty$. Les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$, sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto a_0 \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}x^{2i} + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{4^i i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 ce qui montre déjà que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=a_0\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^{2i}+\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{4^i i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}.$$

De plus, d'après 1., g est impaire. g est donc la partie impaire de la fonction $x\mapsto a_0\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^{2i}+\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{4^i i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$ c'est-à-dire la fonction $x\mapsto\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{4^i i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{4^i i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}.}$$

5. **(a)** Immédiatement

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g_1(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^{2i}\text{ et }\forall x\in\mathbb{R},\ g_2(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)\times i!}.}$$

(b) En effectuant le produit de Cauchy des deux séries entières précédentes, on obtient pour $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}g(x)&=g_1(x)g_2(x)\\&=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^{2i}\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)\times i!}\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{2i+2j+1=2k+1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{1}{(2j+1)\times j!}\right)x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}\frac{1}{(2j+1)\times j!}\right)x^{2k+1}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{(2j+1)}C_k^j\right)x^{2k+1}.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière et d'après la question 4.(e), pour tout entier k on a

$$\frac{(-1)k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{(2j+1)}C_k^j\right)=(-1)^k\frac{4^k k!}{(2k+1)!},$$

ou encore

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{(2j+1)}C_k^j=\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}.}$$

Exercice 2

1. Soit $P\in O_3(\mathbb{R})$. Alors, $\forall x\in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|Ax\|=\|x\|$ et en particulier $\forall x\in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ \|Ax\|=1\Leftrightarrow\|x\|=1$.

$$\boxed{\forall P\in O_3(\mathbb{R}),\ \mathcal{E}(P)=\{x\in\mathbb{R}^3/\ \|x\|=1\}.}$$

2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Alors $Dx=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\alpha_3x_3)$ puis

$$\|Dx\|=1\Leftrightarrow\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\alpha_3^2x_3^2=1\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2}+\frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^2}+\frac{x_3^2}{\left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^2}=1\text{ et donc}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(D)\text{ est un ellipsoïde.}}$$

3. Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$.

(i) ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$. Donc ${}^tAA$ est symétrique réelle.
On sait alors que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles. Soient λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX({}^tAA)X = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|^2,$$

et donc, puisque $X \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}.$$

Maintenant, puisque $X \neq 0$ et que A est inversible, on a $AX \neq 0$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} > 0$.
Ainsi, les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels strictement positifs et donc

$$\boxed{\forall A \in GL_3(\mathbb{R}),\ {}^tAA \text{ est symétrique définie positive.}}$$

(ii) Puisque ${}^tAA$ est symétrique réelle, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale et il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\Delta = \operatorname{diag}(a, b, c) \in D_3(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tP\Delta P$. Puisque ${}^tAA$ est définie positive, a, b et c sont strictement positifs et on peut poser $D = \operatorname{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$. D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$A = {}^tPD^2P.$$

(iii) S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et donc

$$\boxed{S \text{ est une matrice symétrique définie positive.}}$$

(iv) $A = {}^tA^{-1}({}^tPD^2P) = {}^tA^{-1}\,{}^tPDP\,{}^tPDP = QS$ où $Q = {}^tA^{-1}\,{}^tPDP$. Mais

$${}^tQQ = {}^tA^{-1}\,{}^tPDP \times {}^t({}^tA^{-1}\,{}^tPDP) = {}^tA^{-1}\,{}^tPDP\,{}^tP\,{}^tDPA^{-1} = {}^tA^{-1}\,{}^tPD^2PA^{-1} = A^{-1}\,{}^tAAA^{-1} = I_3,$$

et donc $Q \in O_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\exists Q \in O_3(\mathbb{R})/\ A = QS.}$$

(v) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Puisque Q est orthogonale,

$$\|Ax\| = 1 \Leftrightarrow \|Q \times Sx\| = 1 \Leftrightarrow \|Sx\| = 1.$$

$$\boxed{\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S).}$$

(vi) De même, puisque P est orthogonale, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|Sx\| = 1 \Leftrightarrow \|{}^tPDPx\| = 1 \Leftrightarrow \|D \times Px\| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2x_1'^2 + \alpha_2^2x_2'^2 + \alpha_3^2x_3'^2 = 1 \text{ où on a posé } Px = (x_1', x_2', x_3').$$

Maintenant, puisque P est une matrice orthogonale, (x_1', x_2', x_3') sont ls coordonnées de x dans une certaine base orthonormée $\mathcal{B}'$. $\mathcal{E}(S)$ a ainsi pour équation $\alpha_1^2x_1'^2 + \alpha_2^2x_2'^2 + \alpha_3^2x_3'^2 = 1$ dans $\mathcal{B}'$ et donc $\mathcal{E}(S)$ est un ellipsoÏde. Puisque $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$,

$$\boxed{\mathcal{E}(A) \text{ est un ellipsoïde.}}$$

4. **(i)** Soit $v \neq 0$. $\left\|S\left(\dfrac{1}{\|S(v)\|}v\right)\right\| = \left\|\dfrac{1}{\|S(v)\|}S(v)\right\| = \dfrac{\|S(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$. Par suite, $v \in \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ et donc $\left\|S'\left(\dfrac{1}{\|S(v)\|}v\right)\right\| = 1$ ou encore $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$. Cette égalité restant valable pour $v = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^3,\ \|S(v)\| = \|S'(v)\|.}$$

(ii) Soit $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

$$< s(v), s(w) >= \frac{1}{4}\left(\|S(v) + Ss(w)\|^2 - \|S(v) - S(w)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|S(v+w)\|^2 - \|S(v-w)\|^2\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(\|S'(v+w)\|^2 - \|S'(v-w)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|S'(v) + S'(w)\|^2 - \|S'(v) - S'(w)\|^2\right) =< S'(v), S'(w) >.$$

$$\boxed{\forall (v,w) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ < S(v), S(w) >=< S'(v), S'(w) >.}$$

(iii) Ainsi, pour tout $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $< S(v), S(w) >=< S'(v), S'(w) >$. Maintenant, S ou S' sont symétriques et donc égales à leur adjointe. On en déduit que pour tout $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $< S^2(v), w >=< S'^2(v), w >$ et finalement que

$$\forall (v,w) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ < (S^2 - S'^2)(v), w >= 0\ (*).$$

Soit alors $v \in \mathbb{R}^3$. $(*)$ montre que $(S^2 - S'^2)(v) \in (\mathbb{R}^3)^\perp = \{0\}$ et donc que $S^2(v) = S'^2(v)$. Ainsi, $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ S^2(v) = S'^2(v)$ et donc

$$\boxed{S^2 = S'^2.}$$

(iv) Théorème de décomposition des noyaux. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ tel que $P_1 \wedge P_2 = 1$. Alors

$$\mathrm{Ker}((P_1P_2)(f)) = \mathrm{Ker}(P_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(f)).$$

Ici, puisque S est définie positive, $\alpha \neq 0$ et donc $\alpha \neq -\alpha$. On en déduit que $(X - \alpha) \wedge (X + \alpha) = 1$ et d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathrm{Ker}(S^2 - \alpha^2 \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((S - \alpha \mathrm{I})(S + \alpha \mathrm{I})) = \mathrm{Ker}(S - \alpha \mathrm{I}) \oplus \mathrm{Ker}(S + \alpha \mathrm{I}).$$

Maintenant, les valeurs propres de S sont des réels strictement positifs et donc $-\alpha$ n'est pas valeur propre de S ou encore $\mathrm{Ker}(S + \alpha \mathrm{I}) = \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(S^2 - \alpha^2 \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(S - \alpha \mathrm{I})$.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathrm{Sp}(S),\ \mathrm{Ker}(S^2 - \alpha^2 \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(S - \alpha \mathrm{I}).}$$

(v) La démonstration précédente reste valable quand α est un réel strictement positif quelconque. Mais alors, puisque $S^2 = S'^2$,

$$\forall \alpha > 0,\ \mathrm{Ker}(S - \alpha \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(S^2 - \alpha^2 \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(S'^2 - \alpha^2 \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(S' - \alpha \mathrm{I}).$$

En particulier, S et S' ont les mêmes valeurs propres et un vecteur propre de S associée à une certaine valeur propre α est encore valeur propre de S' associée à la même valeur propre α. Maintenant, S est diagonalisable et il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de S. Ce qui précède montre que S et S' coïncident sur $\mathscr{B}$ et donc que

$$\boxed{S = S'.}$$

5. Soit $(A, A') \in (\mathscr{GL}_3(\mathbb{R}))^2$. D'après 3.(iv), $\exists (Q, Q') \in O_3(\mathbb{R}))^2$ et $\exists (S, S') \in S_3^{++}(\mathbb{R}))^2$ telles que $A = QS$ et $A' = Q'S'$. D'après 3.(v) et 4.(v),

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') \Leftrightarrow \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S') \Leftrightarrow S = S'.$$

Donc, si $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$, alors $\exists (Q, Q') \in O_3(\mathbb{R}))^2$, $\exists S \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$ et $A' = Q'S$. Soit $V = QQ'^{-1}$. Puisque $(O_3(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, $V \in O_3(\mathbb{R})$ et de plus,

$$VA' = QQ'^{-1}Q'S = QS = A.$$

Réciproquement, s'il existe $V \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $A = VA'$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\|Ax\| = \|VA'x\| = \|A'x\|$$

et en particulier, $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$.

$$\boxed{\forall (A, A') \in (GL_3(\mathbb{R})^2,\ \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A') \Leftrightarrow \exists V \in O_3(\mathbb{R}) /\ A = VA'.}$$

Exercice 3

1. (i) Pour tout réel $t \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = -5\sin t\,\overrightarrow{i} + 3\cos t\,\overrightarrow{j} \neq \overrightarrow{0}.$$

Donc

$$M(x,y) \in T_t \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M(t)M}, \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 5\cos t & -5\sin t \\ y - 3\sin t & 3\cos t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\cos t(x - 5\cos t) + 5\sin t(y - 3\sin t) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } T_t \text{ est } 3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15.}$$

(ii) Soit $t \in \mathbb{R}$. T_t est la droite passant par $M(t)(5\cos t, 3\sin t)$ et de vecteur directeur $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = -5\sin t\,\overrightarrow{i} + 3\cos t\,\overrightarrow{j}$. Un système d'équations paramétrique de T_t est donc

$$\begin{cases} x = 5\cos t - 5\lambda\sin t \\ y = 3\sin t + 3\lambda\cos t \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $P(5\cos t - 5\lambda\sin t, 3\sin t + 3\lambda\cos t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point de T_t. Alors $P \neq O$ et

$$(OP)\perp T_t \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 0 \Leftrightarrow -5\sin t(5\cos t - 5\lambda\sin t) + 3\cos t(3\sin t + 3\lambda\cos t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{16\cos t\sin t}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité du point P.

(iii) $M(t)$ est un sommet de l'ellipse si et seulement si $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Dans ce cas, T_t est perpendiculaire à la droite $(OM(t))$ et donc $P = M(t)$.

(iv) D'après (ii),

$$P = \left(5\cos t - 5\frac{16\cos t\sin t}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}\sin t, 3\sin t + 3\frac{16\cos t\sin t}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}\cos t\right)$$
$$= \left(\frac{45\cos^3 t + 45\cos t\sin^2 t}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}, \frac{75\sin^3 t + 75\cos^2 t\sin t}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t}\right) = \left(\frac{45\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t)}{9(1-\sin^2 t) + 25\sin^2 t}, \frac{75\sin t(\sin^2 t + \cos^2 t)}{9(1-\sin^2 t) + 25\sin^2 t}\right)$$
$$= \left(\frac{45\cos t}{9 + 16\sin^2 t}, \frac{75\sin t}{9 + 16\sin^2 t}\right).$$

Donc

$$\boxed{P = \left(\frac{45\cos t}{9 + 16\sin^2 t}, \frac{75\sin t}{9 + 16\sin^2 t}\right).}$$

2. (i) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $X'(t)$ est du signe de $-\sin t$. On en déduit le tableau de variation de la fonction $t \mapsto X(t)$.

t	0		$\pi/2$
$X'(t)$	0	$-$	
X	5	$\searrow$	0

(ii) • Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $Y'(t)$ est du signe de $\cos t(3 - 4\sin t)$. En particulier, $Y'(t)$ s'annule en $\alpha = \text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right)$.

• Puisque $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} \leq \frac{9}{16} \leq \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et puisque la fonction Arcsin est croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{4} \leq \text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha \leq \frac{\pi}{3}.$$

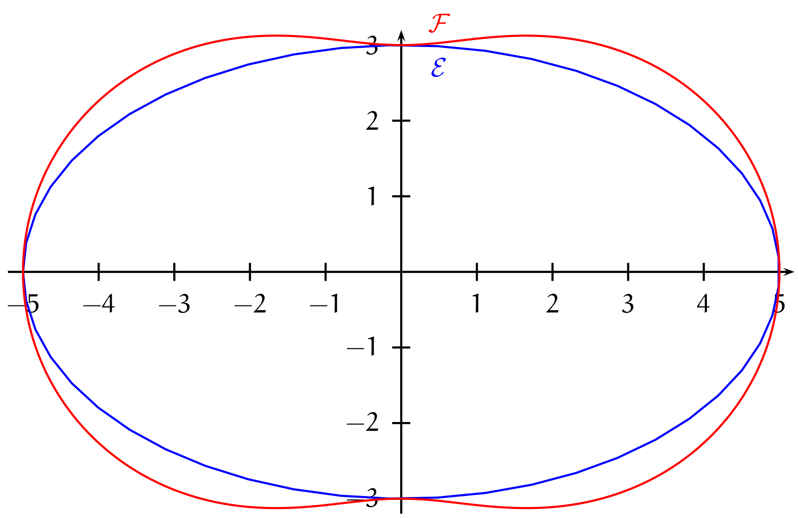
• On a $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ et $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Par suite,

$$X(\alpha) = \frac{45 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{9 + 16 \times \frac{9}{16}} = \frac{5\sqrt{7}}{8} \text{ et } Y(\alpha) = \frac{75 \times \frac{3}{4}}{9 + 16 \times \frac{9}{16}} = \frac{75}{24}.$$

(iii) Tableau de variations de Y.

t	0		α		$\pi/2$
$Y'(t)$		$+$	0	$-$	
Y	0	$\nearrow$	$75/24$	$\searrow$	3

3.

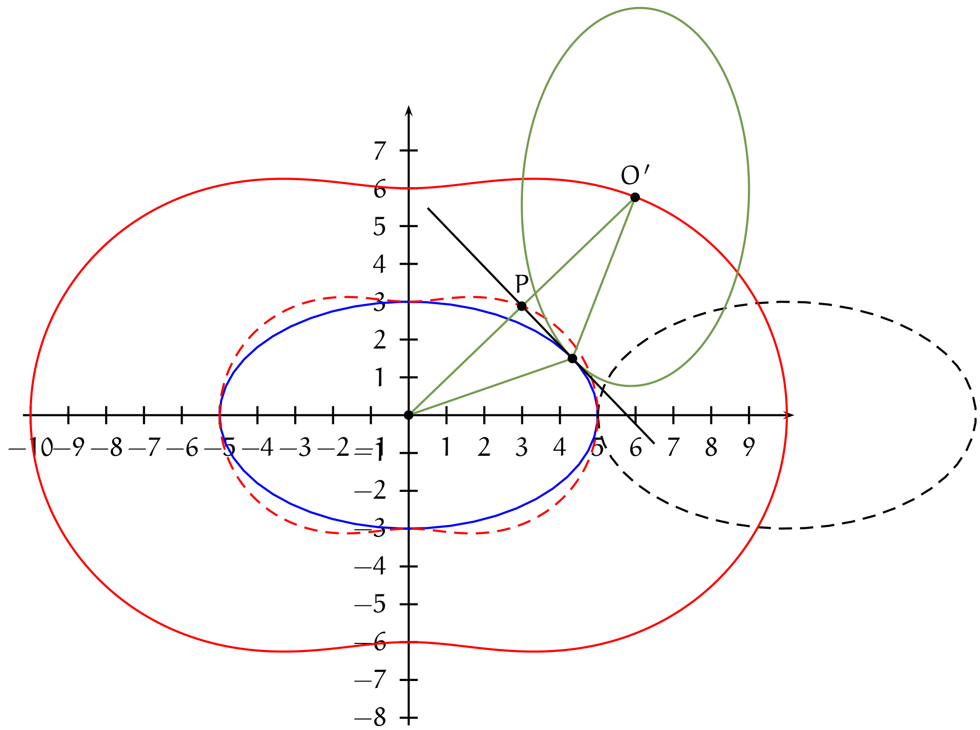


4. A un instant donné, l'ellipse $\mathcal{E}'$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ sont tangentes en un point $M(t)$ et la condition de roulement sans glissement se traduit par le fait que l'ellipse $\mathcal{E}'$ est la symétrique de l'ellipse $\mathcal{E}$ par rapport à sa tangente T_t. Mais alors, le centre O' de $\mathcal{E}'$ est le symétrique du point O par rapport au point P_t. Ainsi, on a toujours

$$\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OP} \text{ (voir graphique page suivante).}$$

Donc

$$\boxed{O' \text{ se déplace sur } \text{hom}_{O,2}(\mathcal{F}).}$$



O′
P

