Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

Préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1a. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

1b. Puisque les endomorphismes I et T commutent, la formule du binôme de Newton permet encore d'écrire

$$L^n = (I+T)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T^k.$$

1c. Soit $u \in E$. Il est clair que pour $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, $(T^k(u))_p = u_{p+k}$. Par suite,

$$(L^n(u))_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (T^k(u))_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k.$$

2. 2a. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer les coefficients de Fourier de f. La fonction f est impaire. Par suite, pour tout entier naturel n, $a_n(f) = 0$, puis pour n entier naturel non nul,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\ dt = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p}(f) = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$.

2b. f est de classe C^1 par morceaux et vérifie en tout point a de $\mathbb{R}$ l'égalité $f(a) = \dfrac{1}{2}(f(a^-) + f(a^+))$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
Les sommes partielles sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, mais la somme de la série à savoir f, n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de f ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2c. Pour tout réel x, on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}(f)\sin((2p+1)x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}.$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient en particulier :

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + p\pi)}{2p+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \text{ et donc}$$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Partie I

1. 1a. Ω_p est le noyau de l'endomorphisme $T^p - I$. Par suite, Ω_p est un sous-espace vectoriel de E.

1b. • Montrons que φ est linéaire. Soient $(u, v) \in (\Omega_p)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_k + \mu v_k)_{0 \leq k \leq p-1} = \lambda(u_k)_{0 \leq k \leq p-1} + \mu(v_k)_{0 \leq k \leq p-1} = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

Donc, φ est linéaire.

• Montrons que φ est injective. Soit $u \in \Omega_p$.
Si $u \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = 0$. Puisque u est p-périodique, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_{n - E(n/p)p} = 0$$

(car $n - E(n/p)p \in [\![0, p-1]\!]$). Par suite, u est la suite nulle.
Puisque $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, φ est injective.

• Montrons que φ est surjective. Soit $(a_0, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = a_{n-E(n/p)p}$. Alors, d'une part, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = a_{(n+p)-E((n+p)/p)p} = a_{n+p-(E(n/p)+1)p} = a_{n-E(n/p)p} = u_n$ et la suite u est bien dans Ω_p, et d'autre part, pour $n \in [\![0, p-1]\!]$, $u_n = a_n$. Ainsi, u est une suite p-périodique telle que $\varphi(u) = (a_0, ..., a_{p-1})$. On vient de montrer que $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{C}^p$ et donc que φ est surjective.

Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \Omega_p \text{ sur } \mathbb{C}^p.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(\Omega_p) = \dim(\mathbb{C}^p) = p.}$$

1c. Pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, $c^j = (\delta_{(n-j)/p, E((n-j)/p)})_{n \in \mathbb{N}}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c^j_{n+p} = \delta_{(n+p-j)/p, E((n+p-j)/p)} = \delta_{(n-j)/p+1, E((n-j)/p)+1} = \delta_{(n-j)/p, E((n-j)/p)} = c^j_n.$$

Les p suites c^j, $0 \leq j \leq p-1$ sont donc bien des éléments de Ω_p.

Montrons que la famille $(c^j)_{0 \leq j \leq p-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\lambda_0 c^0 + \lambda_1 c^1 + \ldots + \lambda_{p-1} c^{p-1}$ soit la suite nulle. On a alors $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots) = (0, 0, \ldots)$ et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.
La famille $(c^j)_{0 \leq j \leq p-1}$ est donc une famille libre de l'espace Ω_p, de cardinal $p = \dim(\Omega_p) < +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la famille } (c^j)_{0 \leq j \leq p-1} \text{ est une base de } \Omega_p.}$$

2. 2a. Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite p-périodique, alors la suite $T(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite p-périodique. Donc, Ω_p est stable par T. Puisque d'autre part Ω_p est stable par I, Ω_p est stable par $I + T = L$.

2b. Si u est dans $\text{Ker}(t)$ alors, pour tout n non nul, $u_n = 0$, puis $u_0 = u_p = 0$ (u étant p-périodique) et finalement, $u = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(t) = \{0\}$. t est donc un endomorphisme injectif de l'espace Ω_p qui est de dimension finie. On en déduit que

$$\boxed{t \in \mathcal{GL}(\Omega_p).}$$

2c.

i) Soit $u \in \text{Ker}(l)$. Alors, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k + u_{k+1} = 0$, ou encore $\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $u_k + u_{k+1} = 0$ et pour $k = p-1$, $0 = u_{p-1} + u_p = u_{p-1} + u_0$ (car u est p-périodique).
Le p-uplet $\varphi(u)$ vérifie donc bien le système $\mathcal{S}$.

ii) $\mathcal{S}$ s'écrit : $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = -u_{k-1}$ et $u_0 = -u_{p-1}$ ce qui équivaut à $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_k = (-1)^k u_0$ et $u_0 = -(-1)^{p-1} u_0 = (-1)^p u_0$.

1er cas. Si p est impair, l'équation $u_0 = (-1)^p u_0$ s'écrit $u_0 = -u_0$ ou encore $u_0 = 0$. Le système $\mathcal{S}$ admet dans ce cas l'unique solution $(0, 0, ..., 0)$.

2ème cas. Si p est pair, le système $\mathcal{S}$ équivaut à $\forall k \in \{1, ..., p-1\}$, $u_k = (-1)^k u_0$. Les p-uplets solutions de $\mathcal{S}$ sont les p-uplets de la forme $\lambda(1, -1, 1, -1, ..., 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) Si p est impair, $u \in \text{Ker}(l) \Rightarrow \varphi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (car φ est un isomorphisme). Dans ce cas, $\text{Ker}(l) = \{0\}$ et l est un automorphisme de Ω_p.

Si p est pair, $u \in \text{Ker}(l) \Rightarrow \varphi(u) \in \text{Vect}(((-1)^k)_{0\leq k\leq p-1}) \Rightarrow u \in \text{Vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Réciproquement, puisque p est pair, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien p-périodique et de plus, $l(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((-1)^n + (-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = 0$. Dans ce cas, $\text{Ker}(l) = \text{Vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est impair, } \text{Ker}(l) = \{0\} \text{ et si } p \text{ est pair, } \text{Ker}(l) = \text{Vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}).}$$

3. 3a. Pour $u \in \Omega_p$, $t^p(u) = (u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u$ et donc $t^p = I$. Le polynôme $X^p - 1$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ (car sans racine commune avec sa dérivée pX^{p-1} dans $\mathbb{C}$). Ainsi, l'endomorphisme t annule un polynôme à racines simples et on sait alors que

$$\boxed{t \text{ est diagonalisable.}}$$

3b. On sait que les valeurs propres d'un endomorphisme sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur et donc les valeurs propres de t sont à choisir parmi les racines de $X^p - 1$ qui sont les racines p-èmes de l'unité.

3c. Soient $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $u \in \Omega_p$.

$$\begin{aligned} t(u) = \omega_k u &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \omega_k u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\omega_k)^n u_0 \\ &\Leftrightarrow u \text{ est géométrique de raison } \omega_k. \end{aligned}$$

La suite $\epsilon^k = (\omega_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite non nulle, p-périodique, de premier terme 1 et vérifie $t(u) = \omega_k u$. Ceci montre que toute racine p-ème de l'unité est valeur propre de t et donc que l'ensemble des valeurs propres de t est l'ensemble des racines p-èmes de l'unité.

La famille $(\epsilon^0, \ldots, \epsilon^{p-1})$ est une famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres deux à deux distinctes. Elle est donc libre. Puisque son cardinal est p la dimension de Ω_p, cette famille est une base de Ω_p constituée de vecteurs propres de t.

3d. Les coordonnées de ϵ^j dans $\mathcal{B}_c$ sont aussi les coordonnées de $\varphi(\epsilon^j)$ dans $\varphi(\mathcal{B}_c)$. Or,

$$\varphi(\epsilon^j) = (\omega_j^i)_{0\leq i\leq p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \omega_j^i \varphi(c^i).$$

La matrice P cherchée est la matrice de VANDERMONDE des racines p-èmes de l'unité :

$$\boxed{P = (\omega_j^i)_{0\leq i,j\leq p-1}}$$

(on a numéroté les lignes et les colonnes de 0 à $p-1$).

3e. Le coefficient ligne k, colonne l de la matrice ${}^tP\overline{P}$ vaut

$$\sum_{u=0}^{p-1} \omega_k^u \overline{\omega_l^u} = \sum_{u=0}^{p-1} (e^{2i(k-l)\pi/p})^u.$$

Pour $0 \leq k, l \leq p-1$, on a

$$-p < -(p-1) \leq k - l \leq p - 1 < p,$$

de sorte que $k - l \in p\mathbb{Z} \Leftrightarrow k - l = 0 \Leftrightarrow k = l$. Donc,

1er cas. Si $k = l$, $\displaystyle\sum_{u=0}^{p-1} \omega_k^u \overline{\omega_l^u} = \sum_{u=0}^{p-1} 1 = p$.

2ème cas. Si $k \neq l$, $e^{2i(k-l)\pi/p} \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{u=0}^{p-1} (e^{2i(k-l)\pi/p})^u = \frac{e^{2i(k-l)\pi} - 1}{e^{2i(k-l)\pi/p} - 1} = 0$.

Finalement, ${}^t P\overline{P} = pI_p$. En conjuguant, on obtient ${}^t\overline{P}P = pI_p$ et donc

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{p}{}^t\overline{P} = \frac{1}{p}(\omega_i^{-j})_{0\leq i,j\leq p-1}.}$$

4. 4a. ϵ^k est vecteur propre de t associé à la valeur propre ω_k. Donc, ϵ^k est vecteur propre de $l = I + t$ associé à la valeur propre $1+\omega_k$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $l^n(\epsilon^k) = (1+\omega_k)^n\epsilon^k$. Mais alors,

$$\boxed{l^n(u) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k(1+\omega_k)^n\epsilon^k.}$$

4b. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$.

$$\frac{1+\omega_k}{2} = \frac{1}{2}e^{ik\pi/p}(e^{ik\pi/p} + e^{-ik\pi/p}) = e^{ik\pi/p}\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right),$$

puis

$$\left|\frac{1+\omega_k}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right|.$$

Pour $1 \leq k \leq p-1$, $0 < \dfrac{\pi}{p} \leq \dfrac{k\pi}{p} \leq \dfrac{(p-1)\pi}{p} < \pi$ et donc $\left|\cos(\dfrac{k\pi}{p})\right| < 1$. On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^n = 0.}$$

4c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2^n}l^n(u)_0 = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^n\epsilon_0^k = \sum_{k=0}^{p-1} x_k\left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^n.$$

Comme $\left(\dfrac{1+\omega_0}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1+1}{2}\right)^n = 1$, et que pour $1 \leq k \leq p-1$, $\left(\dfrac{1+\omega_k}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\dfrac{1}{2^n}l^n(u)_0$ tend vers x_0. Or,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{p}{}^t\overline{P}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La première ligne de ${}^t\overline{P}$ est $(\overline{\omega_0}^0, \ldots, \overline{\omega_0}^{p-1}) = (1, \ldots, 1)$ et donc $x_0 = \dfrac{1}{p}(u_0 + \ldots + u_{p-1})$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}l^n(u)_0 = \frac{1}{p}(u_0 + \ldots + u_{p-1}).}$$

5. On a vu à la question 1c. du préliminaire que pour toute suite u de Ω_p, $l^n(u)_0 = \sum_{k=0}^n C_n^k u_k$. On applique ce résultat à chacune des suites c^j, $0 \leq j \leq p-1$.
Dans ce cas, u_l vaut 1 si l est de la forme $kp+j$ et 0 sinon. Donc

$$l^n(u)_0 = \sum_{0\leq kp+j\leq n} C_n^{kp+j} = \sum_{0\leq k\leq(n-j)/p} C_n^{kp+j}.$$

D'autre part, un et un seul des nombres $u_0, \ldots, u_{p-1}$ vaut 1 et les autres nombres sont nuls. Donc, $\dfrac{1}{p}(u_0+\ldots+u_{p-1}) = \dfrac{1}{p}$.
On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0\leq k\leq (n-j)/p} C_n^{kp+j} = \frac{1}{p}.}$$

Partie II

1. **1a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le préliminaire,

$$\frac{1}{2^n}L^n(u)_0 - \ell = \frac{1}{2^n}(L^n(u)_0 - 2^n\ell) = \frac{1}{2^n}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k - \ell\sum_{k=0}^{n} C_n^k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(u_k - \ell).$$

1b. Soit $n \geq N+1$.
(i).

$$\begin{aligned}|T_N(n)| &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k|u_k-\ell| \leq \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k\right)\sup\{|u_k-\ell|,\ k\in\{N+1,\ldots,n\}\}\\ &\leq \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\right)\sup\{|u_k-\ell|,\ k\in\{N+1,\ldots,n\}\} = \sup\{|u_k-\ell|,\ k\in\{N+1,\ldots,n\}\}.\end{aligned}$$

(ii). On a déjà $|S_N(n)| \leq \dfrac{1}{2^n}(\sum_{k=0}^{N} C_n^k)\sup\{|u_k-\ell|,\ k\in\{0,\ldots,N\}\}$. Maintenant, pour $1\leq k\leq N$,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n\times n\times\ldots\times n}{k!} = \frac{n^k}{k!},$$

ce qui reste vrai pour $k=0$. Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} C_n^k \leq \sum_{k=0}^{N}\frac{n^k}{k!} = P_N(n)$. Finalement

$$|S_N(n)| \leq \frac{1}{2^n}P_N(n)\sup\{|u_k-\ell|,\ k\in\{0,\ldots,N\}\}.$$

(iii). N étant fixé, $P_N(n)$ est un polynôme en n. D'après les théorèmes de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}P_N(n) = 0$.

1c. Soit $\varepsilon > 0$. La suite u converge vers ℓ, et en particulier la suite $|u-\ell|$ est majorée. Soit M un majorant strictement positif de la suite $|u-\ell|$. Pour tout entier N, puis tout entier $n\geq N+1$, on a

$$|\frac{1}{2^n}L^n(u)_0 - \ell| \leq |S_N(n)| + |T_N(n)| \leq \frac{M}{2^n}P_N(n) + \sup\{|u_k-\ell|,\ N+1\leq k\leq n\}.$$

Puisque la suite u tend vers ℓ, on peut choisir N de sorte que, pour tout $n\geq N+1$, $\sup\{|u_k-\ell|,\ N+1\leq k\leq n\}\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. N est ainsi orénavant fixé et pour tout entier $n\geq N+1$, on a alors

$$|\frac{1}{2^n}L^n(u)_0 - \ell| \leq \frac{M}{2^n}P_N(n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la question précédente, $\dfrac{M}{2^n}P_N(n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut donc fournir un entier n_0, que l'on choisit de plus supérieur ou égal à $N+1$, tel que pour $n\geq n_0$, $\dfrac{M}{2^n}P_N(n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geq n_0$, on a $|\frac{1}{2^n}L^n(u)_0-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ (n\geq n_0 \Rightarrow |\dfrac{1}{2^n}L^n(u)_0-\ell| < \varepsilon$, et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (\frac{1}{2^n}L^n(u)_0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell.}$$

2. **2a.** Pour $1 \leq k \leq n$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k &= s_0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k s_k + s_{n+1} = s_0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} s_k + s_{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k s_{k+1} + s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1}\end{aligned}$$

2b.

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k = \frac{1}{2^{n+1}} (\sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1} - 2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k)\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (s_{k+1} - s_k) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k \text{ (en tenant compte de } s_0 = 0)\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0.\end{aligned}$$

2c. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0 = \sum_{n=0}^{N} (S_{n+1} - S_n) = S_{N+1} - S_0 = S_{N+1} \text{ (somme télescopique).}$$

Par hypothèse, la suite s converge vers un complexe ℓ (où $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$). D'après la question II.1c., il en est de même de la suite $(\frac{1}{2^n} L^n(s)_0)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui démontre le résultat :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0.}$$

Partie III : Application

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $J_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}J_n &= \left[x(1-x^2)^n\right]_0^1 - \int_0^1 x \times n \times (-2x) \times (1-x^2)^{n-1}\, dx = 2n \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1}\, dx\\ &= 2n \int_0^1 (x^2 - 1 + 1)(1-x^2)^{n-1}\, dx = 2n(-\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx + \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\, dx\\ &= 2n(-J_n + J_{n-1}),\end{aligned}$$

et donc, $(2n+1)J_n = 2nJ_{n-1}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$J_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} J_0 = \frac{((2n)2(n-1)\ldots(2.1))^2}{(2n+1)(2n)\ldots 2.1} = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}.$$

3. On a vu au préliminaire que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$. Puisque $J_n = L^n(u)_0$, on déduit de la question II.2c. que la série de terme général $\dfrac{1}{2^{n+1}}J_n$ converge et a même somme. Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}}J_n = \dfrac{2^{n-1}n!^2}{(2n+1)!}$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}n!^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{4}.}$$

4. **4a.** Il revient au même de dire que $\pi - \displaystyle\sum_{n=0}^{N_1} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \leq 10^{-1}$. Or,

$$\sum_{n=0}^{0} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = 2,\ \sum_{n=0}^{1} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = 2 + \frac{4}{6} = 2,66\ldots,\ \sum_{n=0}^{2} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{8.4}{120} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = \frac{44}{15} = 2,93\ldots,$$

puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{44}{15} + \frac{16.6^2}{7!} = \frac{44}{15} + \frac{4}{35} = \frac{320}{105} = 3,047 > \pi - 0,1$. Donc, $N_1 = 3$.

4b. Les premières valeurs de la suite $4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ sont

$4,\ \dfrac{8}{3} = 2,66\ldots,\ldots,\ 4(1 - \dfrac{1}{3} + \ldots - \dfrac{1}{19}) = 3,0418\ldots$ et donc $N_2 = 9$.

4c. On a $N_1 < N_2$. On ne peut rien conclure.

