e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisée

Problème

Dans tout le problème, on considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n .$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$U_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(\frac{U_n}{U_{n+1}}).$$

1. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que :

$$\frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

Tournez la page S.V.P.

2. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose $x_n = \frac{1}{2n+1}$.

   (i) Etablir les égalités :

$$v_n = \frac{1}{2x_n} \ln\left(\frac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1}.$$

   (ii) En déduire que :

$$v_n \leqslant \frac{x_n^2}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

   (iii) Justifier que :

      (a) La suite $(\ln(U_n))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

      (b) La suite $(\ln(U_n) - \frac{1}{12n})_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une valeur strictement positive.

Dans la suite, on admettra que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la valeur $\sqrt{2\pi}$. On retrouve ainsi la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Partie II

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

2. En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de terme général $n^{n-1}e^{-n}/n!$ converge.

3. En déduire la convergence normale de la série définissant f sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$.

4. Quel est le domaine de continuité de f?

Partie III

1. Montrer que tout entier naturel n non nul vérifie l'inégalité :

$$(1+\frac{1}{n})^n < e.$$

(*indication :* On pourra montrer que $\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x$.)

2. Quelle est la classe de f sur l'intervalle $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$? Exprimer f' sous forme de série entière sur cet intervalle.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ (*indication :* On pourra regrouper les termes deux par deux dans l'expression de f').

Partie IV

Pour tout entier naturel strictement positif N, on définit A_N et B_N en posant :

$$A_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{n^{n-1}}{n!}(\frac{-1}{e})^n \text{ et } B_N = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{n^{n-1}}{n!}(\frac{-1}{e})^n.$$

1. Montrer que les deux suites $(A_N)_{N\geqslant 1}$ et $(B_N)_{N\geqslant 1}$ sont adjacentes.

2. Etablir un encadrement de $f(\frac{-1}{e})$ à l'aide de A_N et de B_N, pour tout entier naturel strictement positif N.

3. Déterminer un entier naturel N tel que $A_N - B_N < 10^{-2}$.

4. En déduire une valeur approchée de $f(\frac{-1}{e})$ à 10^{-2} près.

Partie V

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (1-e^x)^m.$$

1. Après avoir justifié que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout entier i compris entre 0 et m, il existe un polynôme P_i tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}.$$

Tournez la page S.V.P.

2. En développant $\varphi(x)$, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geqslant 2,\ \sum_{n=1}^{m}(-1)^n C_m^n n^{m-1} = 0.$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(y) = ye^{-y}$.

3. Etudier et représenter la fonction g.

4. Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $\alpha e^{-\alpha} = -\frac{1}{e}$. Montrer de plus :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ g(y) \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}].$$

5. Montrer que :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m).$$

6. Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On considère la suite double $(z_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définie par :

$$\begin{array}{rclc} z_{n,m} & = & (-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ & = & 0 & \text{sinon .} \end{array}$$

Montrer que cette double suite est sommable.

7. En déduire que : $\forall y \in [\alpha, -\alpha],\ f(ye^{-y}) = y$.

On admettra dans ce qui suit que cette propriété est valable sur l'intervalle $[\alpha, 1]$.

8. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}]$.

9. Que peut-on dire de la dérivabilité de f en les points d'abcisses $\frac{-1}{e}$ et $\frac{1}{e}$? Justifier précisément votre réponse.