Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

Partie 0. Un exemple.

1. On a $M = \text{diag}(1, 2, \ldots, n)$. Soit alors $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice AM est la matrice $(ja_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et la matrice MA est la matrice $(ia_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Par suite,

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ ia_{i,j} = ja_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ (i-j)a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0. \\ &\Leftrightarrow A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\mathcal{C}(M) = \mathcal{D}_n(\mathbb{C}).}$$

2. Donc immédiatement,

$$\boxed{\dim(\mathcal{C}(M)) = n.}$$

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Puisque v commute avec u, v commute encore avec $f - \lambda_i \text{Id}$ et

$$(f - \lambda_i \text{Id})(v(x)) = v((f - \lambda_i \text{Id})(x)) = v(0) = 0.$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall x \in E,\ (x \in E_{\lambda_i}(u) \Rightarrow v(x) \in E_{\lambda_i}(u))$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{si } v \in \mathcal{C}(u), \text{ chaque } E_{\lambda_i}(u) \text{ est stable par } v.}$$

2. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. u_i est l'homothétie de rapport λ_i.

3. Si $v \in \mathcal{C}(u)$, d'après 1., pour chaque i, la restriction v_i de v à $E_{\lambda_i}(u)$ est un endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, la matrice de v a la forme voulue.

Réciproquement, s'il existe une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice de v est de la forme de l'énoncé, chaque v_i est un endomorphisme du $E_{\lambda_i}(u)$ correspondant. Comme u_i est une homothétie, u_i et v_i commutent. Ainsi, $v \circ u$ et $u \circ v$ coïncident sur chaque $E_{\lambda_i}(u)$ et comme E est somme directe de ces sous-espaces, on a bien $u \circ v = v \circ u$.

4. $C(u)$ est donc isomorphe à l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_p \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, p]\!],\ V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$, lui-même isomorphe à $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathcal{M}_{n_p}(\mathbb{C})$ qui est de dimension $n_1^2 + \ldots + n_p^2$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2.}$$

5. Chaque n_i est supérieur ou égal à 1. Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i^2 \geq n_i$ puis

$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2 \geq \sum_{i=1}^{p} n_i = n.$$

$$\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) \geq n.}$$

Autre solution. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} 1 \times n_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} n_i^2\right) \ (*).$$

Comme u est diagonalisable, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} 1 \times n_i = n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2 = \dim(\mathcal{C}(u))$ et d'autre part, p est le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes ce qui impose $1 \leq p \leq n$. Donc,

$$(*) \Rightarrow n^2 \leq p \times \dim(\mathcal{C}(u)) \Rightarrow \dim(\mathcal{C}(u)) \geq \frac{n^2}{p} \geq \frac{n^2}{n} = n.$$

Remarque. L'inégalité $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq \dfrac{n^2}{p}$ est plus précise que l'inégalité $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq n$.

6. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice M de la partie 0, u est diagonalisable et $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2

1. On a

$$u^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(x) \in \mathrm{Ker} u \Leftrightarrow \mathrm{Im} u \subset \mathrm{Ker} u.$$

D'après le théorème du rang,

$$n = \dim(\mathrm{Ker} u) + \dim(\mathrm{Im} u) \geq 2\dim(\mathrm{Im} u) = 2r,$$

et donc,

$$\boxed{r \leq \frac{n}{2}.}$$

2. 1 ère solution. (où l'on redémontre le théorème du rang). Soit $(e'_1, ..., e'_r)$ une base de G supplémentaire de $\mathrm{Ker} u$ dans E et soit $(\alpha_1, ...\alpha_r) \in \mathbb{C}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u(e'_i) = 0 \Rightarrow u\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i \in \mathrm{Ker} u \cap G \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,r]\!],\ \alpha_i = 0.$$

La famille $(u(e'_i))_{1 \leq i \leq r}$ est donc une famille libre de $\mathrm{Im} u$. D'autre part, en notant $(e'_{r+1}, \ldots, e'_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, la famille $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E (car G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$) et

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e'_1), \ldots, u(e'_r), u(e'_{r+1}), \ldots, u(e'_n)) = \mathrm{Vect}(u(e'_1), \ldots, u(e'_r)),$$

ce qui montre que la famille $(u(e'_i))_{1 \leq i \leq r}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ et finalement que

$$\boxed{\text{la famille } (u(e'_i))_{1 \leq i \leq r} \text{ est une base de} \mathrm{Im} u.}$$

2 ème solution. (en supposant acquis l'énoncé général du théorème du rang). On sait que la restriction de u à G, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, réalise un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(u)$. On en déduit que l'image par u de la base $(e'_1, \ldots, e'_r)$ de G est une base de $\mathrm{Im}(u)$. On a de nouveau montré que la famille $(u(e'_i))_{1 \leq i \leq r}$ est une base de$\mathrm{Im} u$.

3. Soit G un supplémentaire de Ker$u$ dans E. G est de dimension r et (en changeant les notations de l'énoncé) on note $(e'_{n-r+1}, \dots, e'_n)$ une base de G. Pour $1 \leq i \leq r$, posons alors $e'_i = u(e'_{i+(n-r)})$.
Puisque $1 \leq i \leq r \Rightarrow n-r+1 \leq i+(n-r) \leq n$, d'après ce qui précède, la famille $(e'_i)_{1\leq i\leq r}$ est une base de Imu. Puisque Im$u \subset$ Ker$u$ et que dim(Ker$u$) $= n-r$, on peut compléter la famille libre $(e'_i)_{1\leq i\leq r}$ de Ker$u$ en une base $(e'_i)_{1\leq i\leq n-r}$ de Ker$u$.

Puisque G est un supplémentaire de Ker$u$, $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E et par construction, pour $1 \leq i \leq n-r$, on a $u(e'_i) = 0$ et pour $n-r+1 \leq i \leq n$ on a $u(e'_i) = e'_{i-(n-r)}$. Par suite, dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de u est bien de la forme voulue.

4. Les découpages effectués permettent un calcul par blocs :

$$
\begin{aligned}
v \in \mathcal{C}(u) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & 4_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & 4_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_7 & A_8 & A_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{array} \right. .
\end{aligned}
$$

5. $\mathcal{C}(u)$ est donc isomorphe à l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$. Donc,

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathcal{C}(u)) &= r^2 + rs + r^2 + s^2 + sr = 2r^2 + 2rs + s^2 = 2r^2 + 2r(n-2r) + (n-2r)^2 = 2r^2 - 2rn + n^2 \\
&= 2\left(r - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent d'indice 2, } \dim(\mathcal{C}(u)) \geq \frac{n^2}{2}.}$$

Partie III. Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1)

1. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux car ces polynômes n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$, et le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ est annulateur de u. D'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 = E_1 \oplus E_2.}$$

2. Notons F la fraction considérée. Il existe trois réels a, b et c tel que

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

- $a = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-2)^2} = 1.$
- $c = \lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2F(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1.$
- enfin, $0 = \lim\limits_{x\to +\infty} xF(x) = a + b$ et donc $b = -a = -1$.

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}.}$$

En multipliant les deux membres par $(X-1)(X-2)^2$, on obtient

$$1 = (X-2)^2 + (X-1)[-(X-2)+1] = (-X+3)(X-1) + 1 \times (X-2)^2,$$

et les polynômes $U = -X+3$ et $V = 1$ conviennent.

3. Soit x dans E.

$$x = \mathrm{Id}(x) = [U(u)\circ(u-\mathrm{Id}) + V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2](x) = U(u)\circ(u-\mathrm{Id})(x) + V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x).$$

Posons $x_1 = V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x)$ et $x_2 = U(u)\circ(u-\mathrm{Id})(x)$. Puisque des polynômes en u commutent,

$$(u-\mathrm{Id})(x_1) = (u-\mathrm{Id})(V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x)) = V(u)((u-\mathrm{Id})\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x)) = V(u)(0) = 0,$$

et $x_1 \in E_1$. De même,

$$(u-2\mathrm{Id})^2(x_2) = (u-2\mathrm{Id})^2(U(u)\circ(u-\mathrm{Id})(x)) = U(u)((u-\mathrm{Id})\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x) = U(u)(0) = 0,$$

et donc $x_2 \in E_2$.

On a montré que $\forall x \in E,\ U(u)\circ(u-\mathrm{Id})(x) = p_2(x)$ et $\forall x \in E,\ V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2(x) = p_1(x)$ et donc que

$$\boxed{p_1 = V(u)\circ(u-2\mathrm{Id})^2 \text{ et } p_2 = U(u)\circ(u-\mathrm{Id}).}$$

4. Il est immédiat que dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, la matrice de d est $\mathrm{diag}(1,..,1,2,...,2)$. d est donc diagonalisable.

Autre solution : on a $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$ et donc

$$(d-\mathrm{Id})\circ(d-2\mathrm{Id}) = (p_1+2p_2-\mathrm{Id})\circ(p_1+2p_2-2\mathrm{Id}) = p_2\circ(-p_1) = 0.$$

Le polynôme $(X-1)(X-2)$ est à racines simples et annulateur de d. On en déduit que

$$\boxed{d \text{ est diagonalisable.}}$$

5. d laisse stable E_1 et E_2 (car d est un polynôme en u). De plus, $d_{/E_1} = \mathrm{Id}_{/E_1}$ et $d_{/E_2} = 2\mathrm{Id}_{/E_2}$. Par suite, $w_{/E_1} = u_{/E_1} - \mathrm{Id}_{/E_1} = 0 = w^2_{/E_1}$ et $w^2_{/E_2} = (u_{/E_2} - \mathrm{Id}_{/E_2})^2 = 0$. Les restrictions de w^2 à E_1 et E_2 sont nulles. On en déduit que $w^2 = 0$ et donc que w est nilpotent d'indice au plus 2.

$$\boxed{(w = 0) \text{ ou } (w \neq 0 \text{ et } w^2 = 0).}$$

6. **(a)** Puisque d et w sont des polynômes en u, tout endomorphisme v commutant avec u commute encore avec d et w. Réciproquement, si un endomorphisme v commute avec d et w, il commute avec $u = w + d$.

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{L}(E),\ (v \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow v \in \mathcal{C}(d) \text{ et } v \in \mathcal{C}(w).}$$

(b) On a déjà vu que $w_1 = w_{/E_1} = 0$ et que $w_2 = w_{/E_2} = u_{/E_2} - \mathrm{Id}_{/E_2}$ est un endomorphisme de E_2, nilpotent d'indice au plus 2. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ la matrice de E_2 a la forme désirée.

(c) On a $\mathrm{Ker}(w_2) = E_2 \cap \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})$. Par suite, $\mathrm{rg}N = \mathrm{rg}w_2 = n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id}))$.

(d) Si v est dans $\mathcal{C}(u)$, v commute encore avec $u - \mathrm{Id}$ et $(u-2\mathrm{Id})^2$ et donc laisse stable E_1 et E_2. Dans $\mathcal{B}$, la matrice de v est bien diagonale par blocs. De plus, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2I_{n_2} + N \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre immédiatement que si $vu = uv$, alors $V_2N = NV_2$. La réciproque est immédiate.

(e) u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})$ si et seulement si $\mathrm{rg}N = 0$ (d'après (c)) si et seulement si $N = 0$.

(f) Immédiatement, d'après II. 5.,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{C}(u)) &= n_1^2 + \dim(\mathcal{C}(N)) = n_1^2 + 2r_2^2 - 2r_2n_2 + n_2^2 = n_1^2 + (n_2 - r_2)^2 + r_2^2 \\ &= n_1^2 + (\dim(\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})))^2 + (n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})))^2.\end{aligned}$$

