

Epreuve de Mathématiques 1 MP

Exercice 1

1° Etude de la série entière T_p .

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{np+1}}{np+1} = 0$. Si $x > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{np+1}}{np+1} = +\infty$ et si $x < -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{np+1}}{np+1}$ n'existe pas.

(b) Pour $x = 1$, $\frac{x^{np+1}}{np+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $R \geq 1$. Mais si $x > 1$, $\frac{x^{np+1}}{np+1}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc $R \leq 1$. Finalement

$$R = 1.$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| < 1$, alors $|x^p| < 1$ et la série géométrique de terme général $(-1)^n (x^p)^n$ converge absolument et si $|x| \geq 1$, la série géométrique de terme général $(-1)^n (x^p)^n$ diverge grossièrement. De plus,

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{pn} = \frac{1}{1+x^p}.$$

(d) T_p est la primitive sur $] -1, 1[$, qui s'annule en 0, de la série entière précédente et donc

$$\forall x \in]-1, 1[, T_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{pn+1}}{pn+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^p} dt.$$

2° Une série alternée.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $y \in [0, 1]$, posons $f_n(y) = -p + (pn + p + 1)y^{pn+1} - (pn + 1)y^{pn+p+1}$. f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $y \in [0, 1]$, on a

$$f'_n(y) = (pn + p + 1)(pn + 1)y^{pn} - (pn + p + 1)(pn + 1)y^{pn+p} = (pn + p + 1)(pn + 1)y^{pn}(1 - y^p) \geq 0.$$

La fonction f_n est donc croissante sur $[0, 1]$. En particulier, pour $y \in [0, 1]$,

$$f_n(y) \leq f_n(1) = -p + pn + p + 1 - pn - 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [0, 1], -p + (pn + p + 1)y^{pn+1} - (pn + 1)y^{pn+p+1} \leq 0.$$

(b) Soit $x \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| = \frac{1}{pn+p+1}(1-x^{np+p+1}) - \frac{1}{np+1}(1-x^{np+1}) = \frac{-p + (pn+p+1)x^{pn+1} - (pn+1)x^{pn+p+1}}{(np+1)(np+p+1)} \leq 0.$$

La suite $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Ensuite, quand n tend vers $+\infty$, x^{pn+1} tend vers 0 et donc $\frac{1}{np+1}(1-x^{pn+1})$ tend vers 0.

$$\forall x \in]0, 1[, \text{ la suite } (|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante de limite nulle.}$$

(c) **Critère spécial aux séries alternées.** Soit (v_n) une suite réelle telle que la suite $((-1)^n v_n)$ est de signe constant et la suite $(|v_n|)$ tend vers 0. Alors la série de terme général v_n converge.

On en déduit que, pour tout réel $x \in]0, 1[$, la série de terme gééral $u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

De plus, puisque $u_0(x) = 1 - x > 0$, on sait que pour tout entier naturel N ,

$$\sum_{n=0}^{2N+1} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq \sum_{n=0}^{2N} u_n(x)$$

(d) En particulier, $u_0(x) - u_1(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq u_0(x)$ avec $u_0(x) = 1 - x$ et

$$u_0(x) + u_1(x) = 1 - x - \frac{1}{p+1}(1 - x^{p+1}) = \frac{(p+1)(1-x) - (1-x^{p+1})}{p+1} = \frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1}.$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq 1 - x.$$

3° Soit $x \in]0, 1[$. Puisque les deux séries considérées convergent, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{pn+1}}{pn+1} = S_p - T_p(x).$$

Donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1} \leq S_p - T_p(x) \leq 1 - x.$$

Maintenant, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $1 - x$ tend vers 0 de même que $\frac{p - (p+1)x + x^{p+1}}{p+1}$. On en déduit

que $S_p = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} T_p(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \int_0^x \frac{1}{t^p+1} dt$. Enfin, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^p+1}$ est continue sur $[0, 1]$ et il en est de même de la

fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{t^p+1} dt$. En particulier, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \int_0^x \frac{1}{t^p+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1} dt$. On a montré que

$$S_p = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1} dt.$$

Exercice 2

1° (a) Posons $p = \dim(\text{Ker}(\sigma - \text{Id}_E))$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(\sigma - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(\sigma + \text{Id}_E)$, la matrice de σ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1), \quad p \text{ désignant l'ordre de la valeur propre } 1.$$

et donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma - \text{Id}_E) = \text{diag}(0, \dots, 0, -2, \dots, -2) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma + \text{Id}_E) = \text{diag}(2, \dots, 2, 0, \dots, 0).$$

On en déduit que

$$\text{Im}(\sigma - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_i)_{p+1 \leq i \leq n} = \text{Ker}(\sigma + \text{Id}_E) = \text{Dir}_{\sigma} \text{ et } \text{Im}(\sigma + \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq p} = \text{Ker}(\sigma - \text{Id}_E) = \text{Inv}_{\sigma}.$$

$$\text{Im}(\sigma - \text{Id}_E) = \text{Dir}_{\sigma} \text{ et } \text{Im}(\sigma + \text{Id}_E) = \text{Inv}_{\sigma}.$$

(b) Soit $x \in E$. Puisque $\sigma^* - \text{Id}_E = \sigma^* - \text{Id}_E^* = (\sigma - \text{Id}_E)^*$ et $\sigma^* + \text{Id}_E = \sigma^* + \text{Id}_E^* = (\sigma + \text{Id}_E)^*$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\sigma^* - \text{Id}_E) &\Leftrightarrow (\sigma^* - \text{Id}_E)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, ((\sigma^* - \text{Id}_E)(x), y) = 0 \quad (\Leftarrow \text{ est vraie car } E^{\perp} = \{0\}) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, (x, (\sigma - \text{Id}_E)(y)) = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Im}(\sigma - \text{Id}_E))^{\perp}. \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\sigma^* + \text{Id}_E) &\Leftrightarrow (\sigma^* + \text{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, ((\sigma^* + \text{Id}_E)(x), y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, (x, (\sigma + \text{Id}_E)(y)) = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Im}(\sigma + \text{Id}_E))^\perp. \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\sigma^* - \text{Id}_E) = (\text{Im}(\sigma - \text{Id}_E))^\perp \text{ et } \text{Ker}(\sigma^* + \text{Id}_E) = (\text{Im}(\sigma + \text{Id}_E))^\perp.$$

Maintenant, on a $(\sigma^*)^2 = (\sigma^2)^* = (\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$ et d'après ce qui précède,

$$\sigma^* \text{ est une symétrie vectorielle. De plus } \text{Inv}_{\sigma^*} = (\text{Dir}_\sigma)^\perp \text{ et } \text{Dir}_{\sigma^*} = (\text{Inv}_\sigma)^\perp.$$

2° (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $(f(x)|x) > 0$ et on peut poser $k = \frac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}}$. Mais alors

$$(f(kx)|kx) = k^2(f(x)|x) = \frac{1}{(f(x)|x)}(f(x)|x) = 1.$$

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}}x \in \mathcal{Q}.$$

(b) Soit $x \in E$. Si $x = 0$, l'égalité proposée est vraie et si $x \neq 0$, on peut poser $k = \frac{1}{\sqrt{(f(x)|x)}} > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) &= \frac{1}{k^2}(\sigma^* \circ f \circ \sigma(kx)|kx) = \frac{1}{k^2}(f \circ \sigma(kx)|\sigma(kx)) \\ &= \frac{1}{k^2}(f(kx)|kx) \text{ (car } kx \in \mathcal{Q} \Rightarrow \sigma(kx) \in \mathcal{Q}) \\ &= (f(x)|x). \end{aligned}$$

$$\forall x \in E, (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) = (f(x)|x).$$

(c) Soit alors $(x, y) \in E^2$. On généralise les identités de polarisation. On note tout d'abord que

$$(\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|x) = (y|\sigma^* \circ f^* \circ \sigma(x)) = (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y),$$

et donc

$$\begin{aligned} (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x+y)|x+y) &= (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|x) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|y) \\ &= (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) + 2(\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) + (\sigma^* \circ f \circ \sigma(y)|y). \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|y) &= \frac{1}{4}((\sigma^* \circ f \circ \sigma(x+y)|x+y) - (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x-y)|x-y)) \\ &= \frac{1}{4}((f(x+y)|x+y) - (f(x-y)|x-y)) = (f(x)|y). \end{aligned}$$

Soit $x \in E$ donné. On a : $\forall y \in E, (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x)|y) = 0$. Par suite, $\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x) \in E^\perp = \{0\}$ et donc $\sigma^* \circ f \circ \sigma(x) - f(x) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in E, \sigma^* \circ f \circ \sigma(x) = f(x)$ et donc $\sigma^* \circ f \circ \sigma = f$ ou enfin $\sigma^* \circ f = f \circ \sigma^{-1} = f \circ \sigma$.

$$\sigma^* \circ f = f \circ \sigma.$$

(d) Soit $y \in f(\text{Inv}_\sigma)$. Alors, il existe $x \in \text{Inv}(\sigma)$ tel que $f(x) = y$ et d'après la question précédente

$$\sigma^*(y) = \sigma^*(f(x)) = f(\sigma(x)) = f(x) = y.$$

Donc

$$\forall y \in E, (y \in f(\text{Inv}_\sigma) \Rightarrow \sigma^*(y) = y).$$

(e) On a donc $f(\text{Inv}_\sigma) \subset \text{Inv}_{\sigma^*} = (\text{Dir}_\sigma)^\perp$. Mais f est défini positif et en particulier f est un automorphisme de E ($\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow (f(x)|x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$). On en déduit que

$$\dim(f(\text{Inv}_\sigma)) = \dim(\text{Inv}_\sigma) = n - \dim(\text{Dir}_\sigma) = \dim((\text{Dir}_\sigma)^\perp).$$

Finalement

$$f(\text{Inv}_\sigma) = \text{Inv}_{\sigma^*} = (\text{Dir}_\sigma)^\perp.$$

3° (a) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est $\text{diag}(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2})$. f diagonalise en base orthonormée et est donc un endomorphisme auto-adjoint. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(f(x, y)|(x, y)) = ((\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2})|(x, y)) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

ce qui montre tout à la fois que f est défini positif et que \mathcal{Q} est l'ensemble des couples (x, y) tels que $(f(x, y)|(x, y)) = 1$.

Soit alors σ une symétrie. D'après le résultat admis par l'énoncé, σ laisse I invariant et vérifie $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ si et seulement si I et $f(I)^\perp$ sont en somme directe. Maintenant, si on pose $A(\alpha, \beta)$, I est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta)$ et $f(I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $f(\overrightarrow{OA}) = (\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\beta}{b^2})$ puis $f(I)^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-\frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{a^2})$. Maintenant

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\frac{\beta}{b^2} \\ \beta & \frac{\alpha}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \neq 0,$$

on a bien $\mathbb{R}^2 = I \oplus f(I)^\perp$. La symétrie par rapport à $I = \text{Vect}((\alpha, \beta))$ laissant globalement invariant l'ellipse \mathcal{Q} a pour direction $f(I)^\perp = \text{Vect}((-\frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{a^2}))$.

Construction. La droite $(f(I))^\perp$ est également engendrée par le vecteur $\overrightarrow{OA'} = (-\frac{a}{b}\beta, \frac{b}{a}\alpha)$. On peut noter que le point A' appartient à l'ellipse \mathcal{Q} car

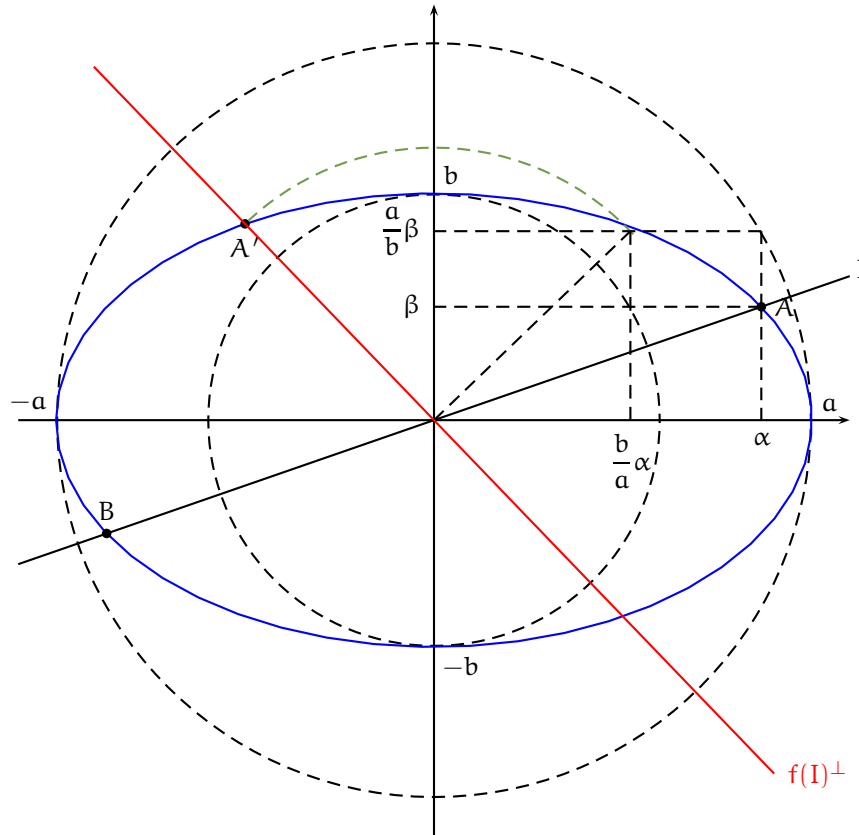
$$\frac{1}{a^2} \left(-\frac{a}{b}\beta\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\alpha\right)^2 = \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} = 1.$$

Maintenant, on sait que l'image de l'ellipse \mathcal{Q} par l'affinité de rapport $\frac{a}{b}$ (resp. $\frac{b}{a}$), d'axe (Ox) (resp. (Oy)) et de direction (Oy) (resp. (Ox)) est le cercle de centre O et de rayon a (resp. b). On en déduit aisément la construction du point A' fournie à la page suivante.

Enfin, prenons comme paramétrisation de l'ellipse \mathcal{Q} $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ et notons t_0 une valeur du paramètre telle que $M(t_0) = A$. On a donc $\alpha = a \cos t_0$ et $\beta = b \sin t_0$. Mais alors

$$-\frac{a}{b}\beta = -\frac{a}{b} \times b \sin t_0 = a \cos \left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{b}{a}\alpha = \frac{b}{a} \times a \cos t_0 = b \sin \left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, si A est le point de l'ellipse \mathcal{Q} de paramètre t_0 , alors A' est le point de l'ellipse \mathcal{Q} de paramètre $t_0 + \frac{\pi}{2}$.



(b) • Soient $p \in \mathbb{N}^*$ puis f_p l'endomorphisme de matrice $\frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. La matrice de f_p dans cette base est symétrique réelle et puisque cette base est orthonormée, f_p est un endomorphisme auto-adjoint. Enfin, $\chi_{f_p} = -(X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p})(X + \frac{2}{p})$. Par suite, aucune valeur propre de f_p n'est nulle et l'une au moins de ses valeurs propres est strictement positive.

• Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(f(x, y, z)|(x, y, z)) = ((\frac{x}{p}, \frac{2z}{p}, \frac{2y}{p})|(x, y, z)) = \frac{1}{p}(x^2 + 4yz),$$

de sorte que $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{p}(x^2 + 4yz) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4yz = p \Leftrightarrow (x, y, z) \in (\mathcal{Q}_p)$. Donc, $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_p)$.

• $\{(1, 1, \frac{p-1}{4}), p \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Cherchons tout d'abord un sous-espace vectoriel I de \mathbb{R}^3 et distinct de \mathbb{R}^3 et contenant la droite affine $\{(1, 1, \frac{p-1}{4}), p \in \mathbb{R}\}$. I ne peut être qu'un plan vectoriel. Soit $ax + by + cz = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, une équation de I .

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{R}, (1, 1, \frac{p-1}{4}) \in I &\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}, a + b - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}p = 0 \\ &\Leftrightarrow a + b - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ et } b = -a. \end{aligned}$$

I est donc le plan vectoriel d'équation $y = x$.

• $I = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ puis $f(I) = \text{Vect}(f(1, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}(\frac{1}{p}(1, 0, 2), \frac{1}{p}(0, 2, 0))$. $(f(I))^\perp$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 2) \wedge (0, 1, 0) = (-2, 0, 1)$. Comme $(-2, 0, 1) \notin I$, I et $(f(I))^\perp$ sont effectivement en somme directe.

• Soit σ la symétrie par rapport au plan I d'équation $x = y$ et de direction la droite $\text{Vect}(-2, 0, 1)$. σ est distincte de l'identité, laisse globalement invariante chaque quadrique (\mathcal{Q}_p) , $p \in \mathbb{R}^*$ et laisse fixe chacun des vecteurs $(1, 1, (p-1)/4)$, $p \in \mathbb{R}$. Déterminons alors la matrice de σ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit $(\vec{u}, \vec{u}') = ((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

$$\vec{u}' = \sigma(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} - \vec{u}' \in (f(I))^\perp \\ \vec{u} + \vec{u}' \in I \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x' = x - 2\lambda \\ y' = y \\ z' = z + \lambda \\ x + x - 2\lambda = y + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} \lambda = x - y \\ x' = -x + 2y \\ y' = y \\ z' = x - y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = y \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

La matrice de σ dans la base canonique est donc $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Il reste à vérifier que (Q_0) est invariante par σ . Mais si $(x', y', z') = \sigma(x, y, z)$, alors

$$x^2 + 4yz = (-x' + 2y')^2 + 4y'(x' - y' + z') = x'^2 + 4y'z',$$

de sorte que $x^2 + 4yz = 0 \Leftrightarrow x'^2 + 4y'z' = 0$ et on a bien $\sigma(Q_0) = Q_0$. Ainsi, en notant \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1° (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $\omega \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{a + i\omega}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc la fonction F_t est de classe C^1 sur \mathbb{R} et si on note φ_t une primitive de la fonction $\omega \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{a + i\omega}$, pour $B \in \mathbb{R}$, on a $F_t(B) = \varphi(B) - \varphi(-B)$ et donc

$$F'_t(B) = \varphi'_t(B) + \varphi'_t(-B) = \frac{e^{iBt}}{a + iB} + \frac{e^{-iBt}}{a - iB}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathbb{R}, F'_t(B) = \frac{e^{iBt}}{a + iB} + \frac{e^{-iBt}}{a - iB}.$$

(b) Pour $u \in \mathbb{R}$, posons $f(u) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n}$. Pour $u \neq 0$, on a $f(u) = \frac{\sin u}{u} = \phi(u)$. Or f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} en tant que fonction développable en série entière sur \mathbb{R} et donc

ϕ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(c) Montrons que la fonction $B \mapsto \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Pour cela, considérons $\Psi :]0, t] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(u, B) \mapsto e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u}$$

• Pour chaque $B \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u}$ est continue et intégrable sur $]0, t]$ (car prolongeable par continuité en 0).

• Ψ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable B sur $]0, t] \times \mathbb{R}$ et pour $(u, B) \in]0, t] \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B}(u, B) = e^{au} \cos(Bu).$$

De plus, pour chaque $u \in]0, t]$, la fonction $B \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial B}(u, B) = e^{au} \cos(Bu)$ est continue sur \mathbb{R} et pour chaque $B \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial B}(u, B) = e^{au} \cos(Bu)$ est continue et intégrable sur $]0, t]$. Enfin, pour $(u, t) \in]0, t] \times \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial B}(u, B) \right| \leq e^{au} = \varphi(u),$$

où φ est une fonction continue et intégrable sur $]0, t]$. D'après le théorème dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction $B \mapsto \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour $B \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dB} \left(\int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du \right) = \int_0^t e^{au} \cos(Bu) du.$$

(d) Pour $B \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dB} \left(2e^{-at} \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du \right) &= 2e^{-at} \int_0^t e^{au} \cos(Bu) du = e^{-at} \int_0^t e^{(a+iB)u} du + e^{-at} \int_0^t e^{(a-iB)u} du \\ &= \frac{e^{-at}}{a+iB} e^{(a+iB)t} + \frac{e^{-at}}{a-iB} e^{(a-iB)t} - \frac{e^{-at}}{a+iB} - \frac{e^{-at}}{a-iB} = F'_t(B) - e^{-at} F'_0(B). \end{aligned}$$

Mais alors, pour $B \in \mathbb{R}$,

$$F'_t(B) = \frac{d}{dB} \left(2e^{-at} \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du \right) + e^{-at} F'_0(B) = \frac{d}{dB} \left(2e^{-at} \left(\int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du + \frac{1}{2} F'_0 \right) \right) (B) = G'_t(B).$$

Ainsi, $F'_t = G'_t$. De plus $F_t(0) = G_t(0) = 0$ et donc pour tout $B \in \mathbb{R}$,

$$F_t(B) = F_t(0) + \int_0^B F'_t(u) du = G_t(0) + \int_0^B G'_t(u) du = G_t(B).$$

On a montré que

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathbb{R}, \int_{-B}^B \frac{e^{i\omega t} d\omega}{a+i\omega} = 2e^{-at} \left(\int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du + \frac{1}{2} \int_{-B}^B \frac{d\omega}{a+i\omega} \right).$$

2° (a) Soit $B \in \mathbb{R}_+^*$. Au vu de l'intégrabilité des différentes fonctions considérées, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du &= \int_0^t \frac{\sin(Bu)}{u} du + \int_0^t \frac{e^{au} - 1}{u} \sin(Bu) du \\ &= \int_0^{Bt} \frac{\sin(v)}{v} dv + \int_0^t \frac{e^{au} - 1}{u} \sin(Bu) du \quad (\text{en posant } v = Bu). \end{aligned}$$

Le rappel (ii) permet d'affirmer que $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^{Bt} \frac{\sin(v)}{v} dv = \text{sign}(t) \frac{\pi}{2}$ (la fonction $v \mapsto \frac{\sin v}{v}$ étant paire).

Ensuite, $\int_0^t \frac{e^{au} - 1}{u} \sin(Bu) du = \int_0^t \lambda(u) \sin(Bu) du$ où $\lambda(u) = \begin{cases} \frac{e^{au} - 1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ a & \text{si } u = 0 \end{cases}$. Comme la fonction λ est continue sur \mathbb{R} , le rappel (i) permet d'affirmer que $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda(u) \sin(Bu) du = 0$. Finalement

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(Bu)}{u} du = \frac{\pi}{2} \text{sign}(t).$$

(b) Soit $B \in \mathbb{R}$.

$$F_0(B) = \int_{-B}^B \frac{1}{a+i\omega} d\omega = \int_{-B}^B \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right) d\omega = \left[\text{Arctan} \left(\frac{\omega}{a} \right) - \frac{i}{2} \ln(a^2 + \omega^2) \right]_{-B}^B = 2 \text{Arctan} \left(\frac{B}{a} \right),$$

et donc $F_0(B)$ tend vers $2 \times \frac{\pi}{2} \text{sign}(a) = \pi \text{sign}(a)$ quand B tend vers $+\infty$.

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{B \rightarrow +\infty} F_0(B) = \pi \text{sign}(a).$$

(c) Mais alors,

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow +\infty} F_t(B) &= \lim_{B \rightarrow +\infty} 2e^{-at} \left(\int_0^t e^{au} \frac{\sin(Bu)}{u} du + \frac{1}{2} \int_{-B}^B \frac{d\omega}{a+i\omega} \right) = 2e^{-at} \left(\frac{\pi}{2} \text{sign}(t) + \frac{1}{2} \pi \text{sign}(a) \right) \\ &= \pi e^{-at} (\text{sign}(t) + \text{sign}(a)). \end{aligned}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B \frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega} d\omega = \pi e^{-at} (\text{sign}(t) + \text{sign}(a)).$$

3° Une formule d'inversion.

(a) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto e^{-a|t|} e^{-i\omega t}$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel t , $|f(t)| = e^{-a|t|}$. Donc, si $a > 0$, $|f(t)|$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et si $a < 0$, $|f(t)|$ est prépondérant devant 1 quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que f est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $a > 0$.

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \chi(t) e^{-i\omega t}$ est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $a > 0$.

(b) Soient $a > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

$$H_x(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(-a-i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall a \in]0, +\infty[, H_x(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $\omega \mapsto \frac{2ae^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2}$ est continue sur \mathbb{R} et dominée par $\frac{1}{\omega^2}$ quand ω tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^*, \text{ la fonction } \omega \mapsto \frac{2ae^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

(d) D'après ce qui précède, pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ae^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega.$$

Maintenant, d'après 2°(c), pour $t > 0$ et $a > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{a+i\omega} = \pi e^{-at} (\text{sign}(a) + \text{sign}(t)) = 2\pi e^{-at} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{-a+i\omega} = \pi e^{-at} (\text{sign}(-a) + \text{sign}(t)) = 0.$$

On en déduit que

$$2\pi e^{-at} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{a+i\omega} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{-a+i\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ae^{i\omega t} d\omega}{a^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Ainsi,

$$\forall a > 0, \forall t > 0, \chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Si $t < 0$ et $a > 0$, en posant $u = -\omega$ on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ae^{i\omega t} d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{2ae^{-iut}(-du)}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ae^{iu(-t)} du}{a^2 + u^2} = x(-t) = x(t).$$

Enfin si $t = 0$ et $a > 0$, puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \pi$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a d\omega}{a^2 + \omega^2} = \pi = x(0).$$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall a > 0, x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$