SESSION 2001

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Exercice 1

1°. Soit u un endomorphisme de E. On sait que $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre. Par suite, u^+ est un endomorphisme de E. Soit h un élément de G. Vérifions que $u^+ \circ h = h \circ u^+$ ou encore que $h^{-1} \circ u^+ \circ h = u^+$.

$$h^{-1} \circ u^+ \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} h^{-1} g^{-1} u g h = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} (gh)^{-1} u (gh).$$

Considérons alors l'application $\varphi_h : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & gh \end{array}$.

- φ est bien une application de G dans G, car G est stable pour la loi $\circ$.
- φ est injective. En effet, dans un groupe tout élément est simplifiable et l'égalité $g \circ h = g' \circ h$ implique l'égalité $g = g'$.

φ est donc une application injective de l'ensemble fini G dans lui-même. D'après un résultat classique de théorie des ensembles, on sait que φ est une permutation de G. Donc,

$$h^{-1} \circ u^+ \circ h = \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} g'^{-1} u g' = u^+.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall g \in G,\ g \circ u^+ = u^+ \circ g.}$$

2°.

$$\begin{aligned}(u^+)^+ &= \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u^+ g = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} u^+ \quad \text{(d'après 1°.)} \\ &= \frac{1}{m}.(m u^+) = u^+\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E),\ (u^+)^+ = u^+.}$$

3°. On sait que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, vérifiant de plus pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$. En particulier, si f est un endomorphisme de E et si g est un automorphisme de E,

$$\mathrm{Tr}(g^{-1} \circ f \circ g) = \mathrm{Tr}(f \circ g \circ g^{-1}) = \mathrm{Tr}(f).$$

Donc,

$$\mathrm{Tr}(u^+) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g^{-1} u g) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(u) = \frac{1}{m} \times m \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u).$$

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr}(u^+) = \mathrm{Tr}(u).}$$

4°. Soit x un élément de F. Pour tout élément g de G, $g(x) \in F$. Donc, puisque p est un projecteur d'image F,

$$p(g(x)) = g(x), \text{ puis } g^{-1}(p(g(x))) = g^{-1}(g(x)) = x.$$

Par suite,

$$p^+(x) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1}(p(g(x))) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} x = x.$$

Puisque x est invariant par p^+, x est en particulier dans l'image de p^+ ($x = p^+(x)$). On a montré que

$$\boxed{F \subset \mathrm{Im}(p^+).}$$

5°. Soit x un élément de E. Soient g et h deux éléments de G (de sorte que $h^{-1} \in G$).

$$\begin{aligned}
p(h(x)) \in F &\Rightarrow g(h^{-1}(p(h(x)))) \in F \\
&\Rightarrow p(g(h^{-1}(p(h(x))))) = g(h^{-1}(p(h(x)))) \\
&\Rightarrow g^{-1}(p(g(h^{-1}(p(h(x)))))) = g^{-1}(g(h^{-1}(p(h(x))))) = h^{-1}(p(h(x)))
\end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout élément x de E, on a donc

$$\boxed{\forall (g,h) \in G^2,\ g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph.}$$

6°.

$$\begin{aligned}
(p^+)^2 &= \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h)\in G^2} g^{-1}pgh^{-1}ph = \frac{1}{m^2} \sum_{(g,h)\in G^2} h^{-1}ph \quad \text{(d'après 5°.)} \\
&= \frac{1}{m^2}.m \sum_{h\in G} h^{-1}ph = \frac{1}{m} \sum_{h\in G} h^{-1}ph = p^+
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{p^+ \text{ est un projecteur.}}$$

7°. On a vu au 6°. que p^+ est un projecteur. En 4°., on a démontré que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p^+)$. Enfin, puisque p et p^+ sont des projecteurs, d'après 3°.,

$$\dim(\mathrm{Im}(p^+)) = \mathrm{Tr}(p^+) = \mathrm{Tr}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p))(< +\infty).$$

Donc, $\mathrm{Im}(p^+) = \mathrm{Im}(p)$. On a montré que

$$\boxed{p \text{ et } p^+ \text{ sont des projecteurs ayant mêmes images.}}$$

8°. Puisque p^+ est un projecteur d'image F, son noyau est un supplémentaire de F. Vérifions que ce noyau est stable par tous les éléments de G.
Soient g un élément de G et x un élément de $\mathrm{Ker}(p^+)$. Montrons que $g(x)$ est encore dans $\mathrm{Ker}(p^+)$. Mais, d'après 1°., p^+ commute avec tous les éléments de G et donc

$$p^+(g(x)) = g(p^+(x)) = g(0) = 0.$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p^+) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ stable par tous les éléments de } G.}$$

9°. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de G. Soit p un projecteur d'image F. D'après 8°., $F' = \mathrm{Ker}(p^+)$ est un supplémentaire de F stable pour tous les éléments de G.

Exercice 2

1°. Soit (u, v) un couple de réels tels que $0 < \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u \pm v| = |u \times 1 \pm v \times 1| \leq \sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \rho\sqrt{2}.$$

$$\boxed{|u + v| \leq \rho\sqrt{2} \text{ et } |u - v| \leq \rho\sqrt{2}.}$$

2°. Soit (u, v) un couple de réels tels que $0 < \sqrt{u^2+v^2} \leq 1$.
$\frac{1}{2}D(u, v)$ est le carré de la distance du point (u, v) au point $(-1, -1)$. (u, v) étant un point du disque de centre O et rayon 1, il est clair géométriquement que cette distance est minimum quand (u, v) est le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Par suite,

$$D(u, v) \geq D(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2(\sqrt{2}-1)^2 = 2(3-2\sqrt{2}).$$

Par suite,

$$3D(u, v) \geq 6(3-2\sqrt{2}) \geq 6(3-2\times 1,4) = 1,2 > 1.$$

3°. Classiquement, pour tous réels u et v, $|2uv| \leq u^2+v^2$ ($(|u|-|v|)^2 \geq 0$ fournit $u^2+v^2-|2uv| \geq 0$ puis $|2uv| \leq u^2+v^2$). Par suite, si (u, v) est un couple de réels tel que $0 < \sqrt{u^2+v^2} \leq 1$,

$$\begin{aligned}|N(u, v)| &\leq |u^2-v^2|(u^2+v^2) + 2|2uv||u-v| \\ &\leq (u^2+v^2)^2 + 2(u^2+v^2)|u-v| \\ &\leq \rho^4 + 2\rho^2\sqrt{2}\rho \quad \text{(d'après 1).)} \\ &= 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ (0 < \sqrt{u^2+v^2} \leq 1 \Rightarrow |N(u, v)| 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4.}$$

4°. Soit (u, v) un couple de réels tel que $0 < \sqrt{u^2+v^2} \leq 1$. Dans ce cas, $(u+1)^2 + (v+1)^2 \neq 0$ et $f(1+u, 1+v)$ et $g(u, v)$ sont définis.

$$\begin{aligned}g(u, v) &= \frac{(u+1)^2-(v+1)^2}{(u+1)^2+(v+1)^2} - (u-v) - \frac{v^2-u^2}{2} \\ &= \frac{2((u+1)^2-(v+1)^2) + (-2(u-v)+(u^2-v^2))((u+1)^2+(v+1)^2)}{D((u, v))} \\ &= \frac{2(u-v)(u+v+2) + (-2(u-v)+(u^2-v^2))(u^2+v^2+2(u+v+1))}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2-v^2)(u^2+v^2) + 2(u-v)(u+v+2-(u^2+v^2+2(u+v+1)))}{D((u, v))} \\ &+ \frac{2(u^2-v^2)(u+v+1)}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2-v^2)(u^2+v^2) + 2(u-v)(-u^2-v^2-u-v+(u+v)(u+v+1))}{D((u, v))} \\ &= \frac{(u^2-v^2)(u^2+v^2) + 2(u-v)(2uv)}{D((u, v))} = \frac{N((u, v))}{D((u, v))}\end{aligned}$$

Par suite, d'après 2°. et 3°.,

$$\begin{aligned}\frac{|g(u, v)|}{\rho^3} &= \frac{|N((u, v))|}{\rho^3|D((u, v))|} \\ &\leq \frac{2\rho^3\sqrt{2}+\rho^4}{\frac{1}{3}\rho^3} = 3(2\sqrt{2}+\rho) \leq 3(2\sqrt{2}+1) \leq 12\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ (0 < \sqrt{u^2+v^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{|g(u, v)|}{\rho^3} \leq 12.}$$

5°. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en vertu de théorèmes généraux.
Soit (x, y) un couple de réels distinct de $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

et de même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\ \text{et}\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.}$$

6°. Soit (x,y) un couple de réels distinct de $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4y^2\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2}+x\frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}\right)=\frac{4y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

et de même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-4x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4x\left(2y\frac{1}{(x^2+y^2)^2}+y^2\frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}\right)=\frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{4y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-4x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.}$$

7°. D'après 5°. et 6°., on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=1\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=0.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(1,1)$ appliquée à f fournit, quand le couple (u,v) tend vers le couple $(0,0)$,

$$\begin{aligned}f((1+u,1+v))&=f((1,1))+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)u+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)v\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)u^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)uv+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)v^2\right)+o(\|(u,v)\|_2^2)\\&=(u-v)+\frac{v^2-u^2}{2}+o(\|(u,v)\|_2^2),\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore,

$$g((u,v))=o(\rho^2).$$

Or, en 4°., nous avons établi directement que, quand le couple (u,v) tend vers le couple $(0,0)$,

$$g((u,v))=O(\rho^3),$$

et donc, nous avons déterminé directement le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1,1)$.

8°. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et on sait que la surface (S) d'équation $z=f(x,y)$ est régulière. (S) admet en tout point $M(x,y,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2})$, $(x,y)\neq(0,0)$ un plan tangent dont la normale est dirigée par le vecteur :

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\\\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\\1\end{pmatrix}$$

L'angle (non orienté) que fait ce plan tangent avec le plan (Oxy) d'équation $z=0$ est encore l'angle non orienté que font entre eux les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{k}$. Par définition,

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\|\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{k}\|}{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{k}|}.$$

Or,

$$\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{k}=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j})$$

et donc,

$$\|\vec{n}\wedge\vec{k}\| = \frac{4|xy|}{(x^2+y^2)^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4|xy|}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

En tenant compte de $|\vec{n}.\overrightarrow{k}| = 1$, on a montré que

$$\boxed{\tan\theta = \frac{4|xy|}{(x^2+y^2)^{3/2}}.}$$

9°. Pour tout couple (x, y) distinct du couple $(0, 0)$, $f(\pm x, \pm y) = f(x, y)$. Ceci signifie que la surface (S) admet les plans (xOz) et (yOz) pour plans de symétrie et donc l'axe (Oz) pour axe de symétrie.

Faisons alors varier le point $(x, y, 0)$ sur une demi-droite d'origine $(0, 0, 0)$, privée de $(0, 0, 0)$ et d'angle polaire $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dans le plan (xOy) (α car la lettre θ est déjà utilisée par l'énoncé).

Le point $(x, y, 0)$ admet pour coordonnées cylindriques $(r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$ où α est un réel fixé de $]0, \frac{\pi}{2}[$ et r décrit $]0, +\infty[$.

En ce point,

$$\tan\theta = \frac{4r\cos\alpha r\sin\alpha}{(r^2)^{3/2}} = \frac{2\sin(2\alpha)}{r}.$$

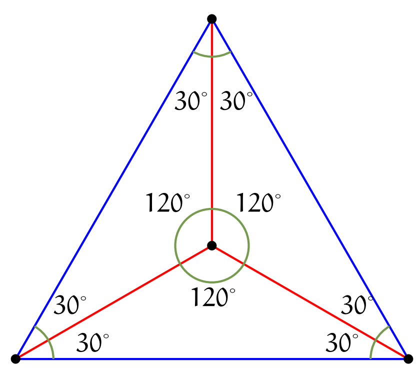
Ainsi, quand r croit de 0 à $+\infty$, $\tan\theta$ décroit de $+\infty$ à 0 ou encore θ décroit de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Quand le point $(x, y, 0)$ décrit une demi-droite du plan d'équation $z = 0$ d'origine $(0, 0, 0)$, le plan tangent à la surface (S) en le point $(x, y, f(x, y))$ part d'une position presque verticale et s'affaisse jusqu'à tendre vers une position horizontale.

Dans le cas particulier où $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan\theta = 0$ pour tout $r \in]0, +\infty[$.

Exercice 3

1°. Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. Ce triangle est la réunion des trois triangles OBC, OCA, et OAB. Chacun de ces trois triangles est pseudo-rectangle, car admet pour angles 30°, 30° et $120^\circ = 30^\circ + 90^\circ$.



2°. (Voir figure page suivante) Posons $\widehat{C} = \alpha$. Au vu de $\widehat{B} = \widehat{C} + \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$, α est élément de $]0, \frac{\pi}{4}[$ et on a

$$\widehat{A} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,\ \widehat{B} = \alpha + \frac{\pi}{2} \text{ et } \widehat{C} = \alpha.$$

Notons I le milieu du segment $[BB']$.

L'angle $\widehat{BAB'}$ est le complémentaire de l'angle $\widehat{CAB}$ et vaut donc

$$\widehat{BAB'} = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = 2\alpha.$$

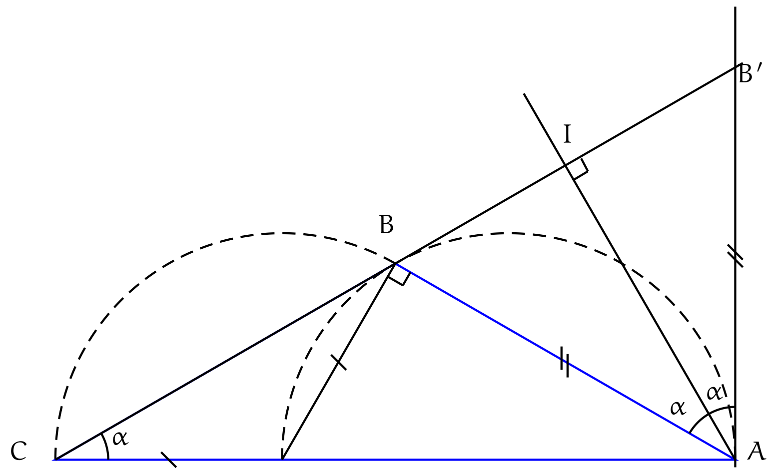
L'angle $\widehat{AB'B}$ est le complémentaire de l'angle $\widehat{BCA}$ et vaut donc

$$\widehat{AB'B} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

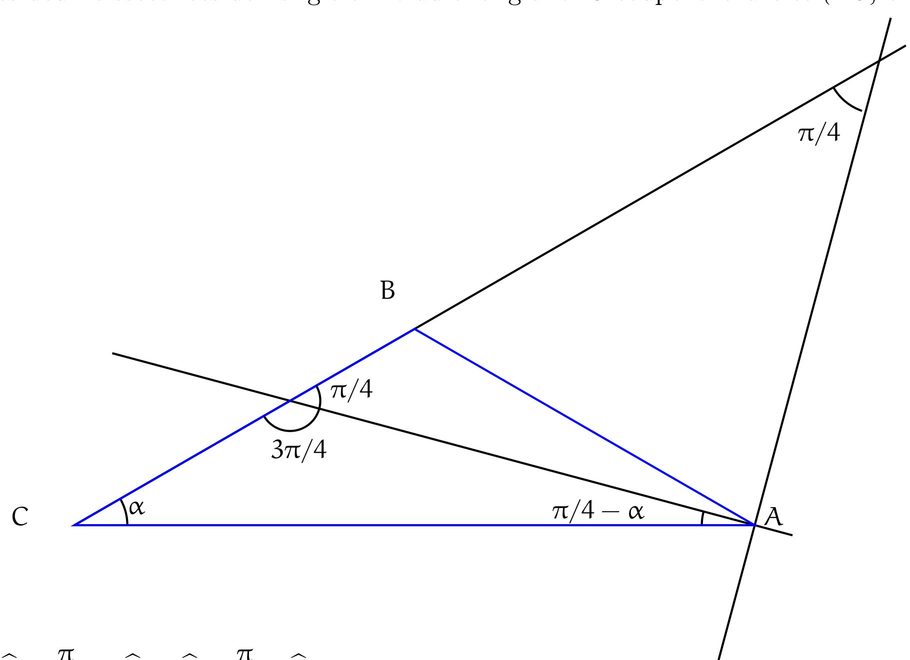
L'angle $\widehat{ABB'}$ vaut alors

$$\widehat{ABB'} = \pi - 2\alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha = \widehat{AB'B}.$$

Le triangle BAB' est donc isocèle en A. La droite (AI) est ainsi la médiatrice du segment $[BB']$.
Par suite, le milieu I du segment $[BB']$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) ou encore le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.



3°. La bissectrice intérieure de l'angle en A du triangle ABC fait, avec la droite (AC) un angle (non orienté) de $\frac{1}{2}\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4} - \alpha$ et donc, puisque l'angle $\widehat{ACB}$ vaut α, fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec la droite (BC). Il en est de même de la bissectrice extérieure de l'angle en A du triangle ABC, puisque celle-ci est perpendiculaire à la bissectrice intérieure.
/noindent Les deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC coupent la droite (BC) à $45°$.



4°. On a déjà $\widehat{A} = \frac{\pi}{2} - 2\widehat{C}$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{2} + \widehat{C}$. Donc,

$$\boxed{\widehat{B} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2} \text{ et } \widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}.}$$

Ensuite, d'après la loi des sinus, (puisque $\pi - \widehat{B} = \frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2}$),

$$\boxed{a = 2R\sin(\widehat{A}),\ b = 2R\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2}) \text{ et } c = 2R\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}).}$$

Enfin,

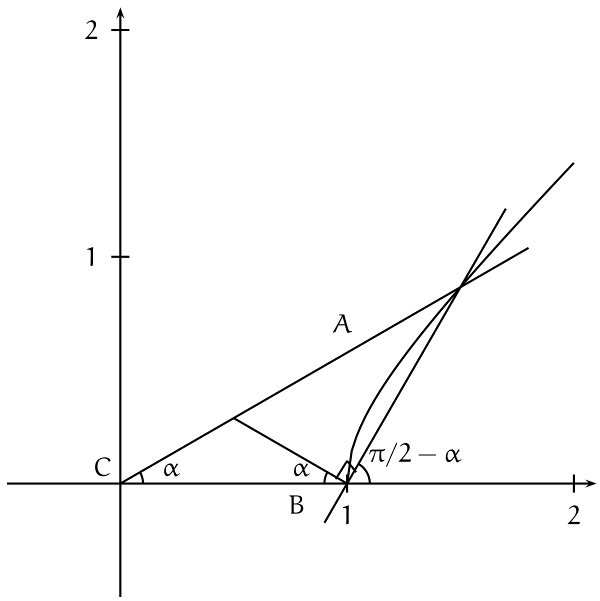
$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}2R\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\widehat{A}}{2})2R\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2})\sin(\widehat{A}) = 2R^2\frac{1}{2}(\cos(\widehat{A}) - \cos(\frac{\pi}{2}))\sin(\widehat{A}) = \frac{R^2\sin(2\widehat{A})}{2}$$

et donc,

$$\boxed{S = \frac{R^2 \sin(2\widehat{A})}{2}.}$$

5°. On note toujours $\alpha (\in]0, \frac{\pi}{4}[)$ l'angle $\widehat{C}$.

On se place dans un repère orthonormé direct d'origine C tel que le point B ait pour coordonnées $(1, 0)$. Le point A est alors l'intersection de la droite passant par C et d'angle polaire α et de la droite passant par B et d'angle polaire $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (puisque $\widehat{B} = \frac{\pi}{2} + \alpha$). Ceci fournit une construction du point A à partir des points B et C et de l'angle $\widehat{C}$.



Déterminons les coordonnées (x, y) de A. Le point A est l'intersection des droites d'équations respectives

$$y = x \tan \alpha$$

et

$$y = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)(x - 1) = \frac{1}{\tan \alpha}(x - 1).$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} y = x \tan \alpha \\ y = \dfrac{1}{\tan \alpha}(x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x \tan \alpha \\ x \tan \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}(x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x \tan \alpha \\ x = \dfrac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ x = \dfrac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}\right. .$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, le point A décrit le support de l'arc paramétré

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{1 - \tan^2 \alpha} \\ y = \dfrac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}\right. , \ \alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[\quad (1).$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, x décrit $]1, +\infty[$ en décroissant strictement et y décrit $]0, +\infty[$. Donc,

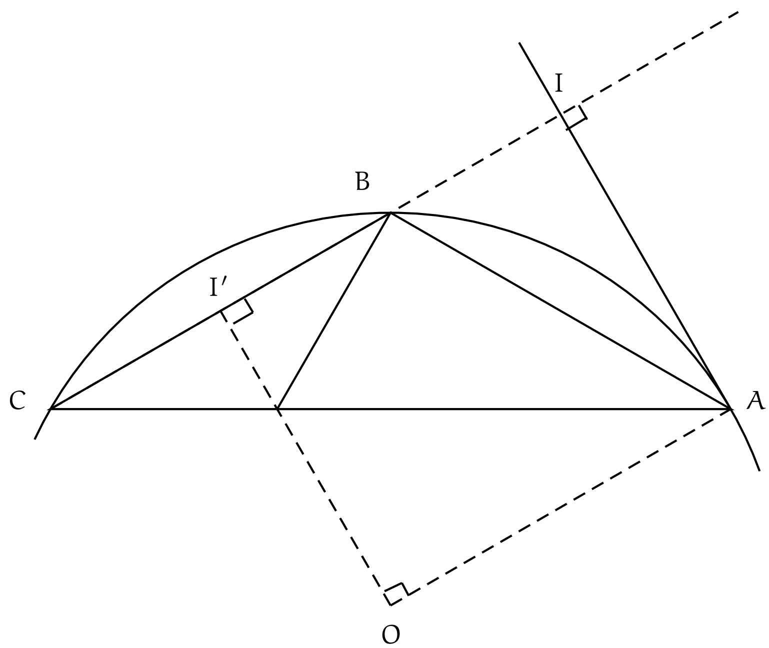
$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \\ y = \dfrac{y/x}{1-(y^2/x^2)}, \end{array} \right. , \ x > 1, \ y > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}, \ x > 1, \ y > 0 \ \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x, \ x > 1, \ y > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}, \ x > 1, \ y > 0.$$

Quand α décrit $]0, \frac{\pi}{4}[$, le point A décrit une demi-branche d'hyperbole de centre le milieu du segment $[BC]$.

6°. Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I' le milieu du segment $[BC]$.



La droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC) de même que la droite (OI') (puisque la droite (OI') est la médiatrice du segment $[BC]$). Le quadrilatère $OI'IA$ est donc un trapèze rectangle. Maintenant, puisque I' est le milieu du segment $[BC]$ et puisque I est le milieu du segment $[BB']$,

$$II' = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}\frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{b}{2\cos\alpha} = \frac{2R\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2\cos\alpha} = R = OA.$$

Donc, le quadrilatère $OI'IA$ est un rectangle et, en particulier, la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (OA). La tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC est donc la droite (AI).

7°. On sait déjà que la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC et l'orthocentre H du triangle ABC est sur la droite (AI).

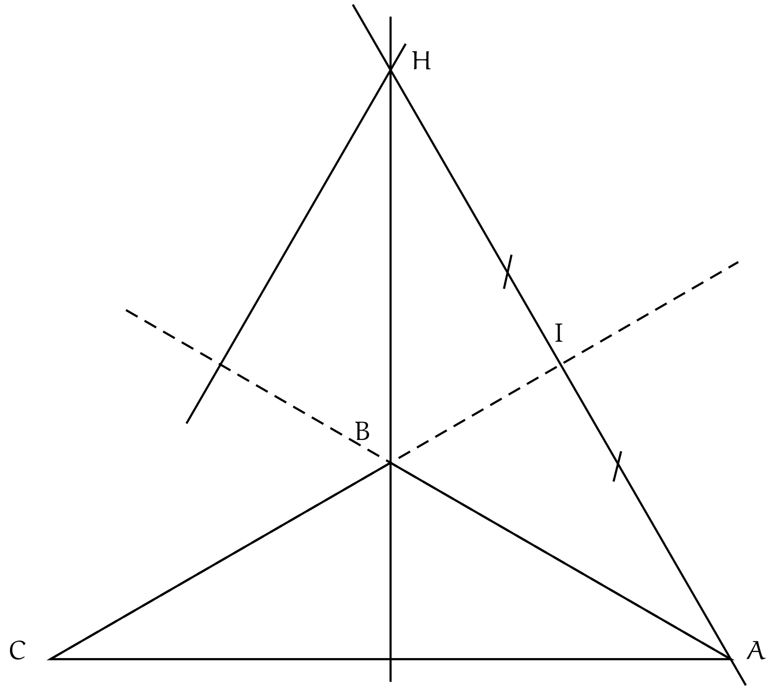
Plus précisément, considérons le triangle ABH. L'angle $\widehat{BAH}$ est l'angle $\widehat{BAI}$ et vaut donc α. Donc,

$$\widehat{BAH} = \alpha.$$

D'autre part, les droites (BH) et (AB') sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). On en déduit que les angles alternes-internes $\widehat{BHI}$ et $\widehat{AIB'}$ sont égaux. Donc,

$$\widehat{BHI} = \alpha.$$

Ainsi, le triangle ABH est isocèle en B et l'orthocentre H du triangle ABC est le symétrique du point A par rapport au point I.



8°. Soit ABC un triangle.

– Supposns le triangle ABC soit tel que $\widehat{B} = \widehat{C} + \dfrac{\pi}{2}$.
  On a vu au 4°. que
  $$a = 2R\sin\widehat{A},$$
  mais aussi que
  $$ah = 2S = 2R^2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}.$$
  En comparant ces deux égalités, on obtient
  $$2Rh\sin\widehat{A} = 2R^2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}$$
  et donc
  $$\boxed{h = R\cos\widehat{A}.}$$
– Réciproquement, supposons que le triangle ABC soit tel que $h = R\cos\widehat{A}$. On a alors :
  $$\begin{aligned}
  h = R\cos\widehat{A} &\Leftrightarrow \frac{ah}{2} = \frac{aR\cos\widehat{A}}{2} \Leftrightarrow S = R^2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}\\
  &\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = R^2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}\\
  &\Leftrightarrow 2R^2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C} = R^2\cos(\pi - \widehat{B} - \widehat{C})\\
  &\Leftrightarrow 2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C} + \cos(\widehat{B} + \widehat{C}) = 0\\
  &\Leftrightarrow 2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C} + \cos\widehat{B}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{B}\sin\widehat{C} = 0\\
  &\Leftrightarrow \cos\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{C} = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{C} - \widehat{B}) = 0\\
  &\Leftrightarrow \widehat{C} - \widehat{B} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}.
  \end{aligned}$$
  Le triangle ABC est donc bien pseudo-rectangle.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle est que $h = R\cos\widehat{A}$.

