



CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

durée 3 heures

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E ; pour tout endomorphisme f , f^* désigne l'adjoint de f et, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on note p_F la projection orthogonale de E sur F : $p_F \in \mathcal{L}(E)$.

1°. Soit $f = p_F \circ g$ où F est un sous-espace vectoriel de E et $g \in \mathcal{O}(E)$.

(a) Préciser $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ à l'aide de F et g .

(b) Montrer l'existence d'un unique sous-espace vectoriel F' de E tel que :

$$p_F \circ g = g \circ p_{F'}$$

(c) Donner une expression simplifiée de $f \circ f^* \circ f$.

2°. Soit F un sous-espace vectoriel fixé de E , distinct de E et de $\{0\}$.

(a) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$; établir une condition nécessaire et suffisante pour que p_F et g commutent.

(b) Soit \mathcal{G} l'ensemble des $p_F \circ g$ tels que $p_F \circ g = g \circ p_F$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$; montrer que (\mathcal{G}, \circ) est un groupe isomorphe à un groupe connu; \mathcal{G} est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E ?

(c) Montrer que l'ensemble des $p_F \circ g$ obtenu lorsque g décrit $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par l'opération de composition.

3°. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* \circ f = f$.

(a) Établir que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

(b) Montrer que : $\forall x \in (\text{Ker } f)^\perp, \|f(x)\| = \|x\|$.

(c) En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel F de E et d'une application $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que : $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1°. (a) Pour quels réels x la fonction $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt$ est-elle définie ?

(b) Pour $t > 0$ fixé, développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto \frac{t^x}{(1+t)^2}$.

2°. (a) Calculer $\int_0^1 (\ln t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n!}{4} \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2} dt \leq n!$.

3°. (a) Établir une relation simple entre $\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2} dt$.

(b) Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

4°. On pose dans cette question $x = \frac{1}{2p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on veut calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt$.

On rappelle que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \mapsto \frac{1}{u-\omega}$ admet pour primitive sur \mathbb{R} la fonction $u \mapsto \ln |u-\omega| + i \arg(u-\omega)$, où $\arg(u-\omega)$ désigne l'argument de $u-\omega$ strictement compris entre $-\pi$ et π .

(a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^{2p}}$.

(b) En précisant les éléments de l'ensemble Ω , établir la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} :

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\omega}{u-\omega}$$

(c) Montrer qu'en calculant $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^{2p}}$ la partie logarithmique s'annule.

(d) En posant $\alpha = e^{i\pi/p}$, simplifier $(1-\alpha) \sum_{k=-p}^{p-1} k \alpha^k$ et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}$$

5°. Montrer que la fonction $x \mapsto \pi x - f(x) \sin \pi x$ est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1, +1[, \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base de E que l'on ne suppose pas orthonormale; l'ensemble $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{a} + \mathbb{Z}\vec{b} + \mathbb{Z}\vec{c}$ des combinaisons linéaires de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ à coefficients entiers forme alors un sous-groupe de $(E, +)$ appelé *réseau* engendré par $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

1°. Soit D une *droite réticulaire* de \mathcal{R} , c'est-à-dire une droite vectorielle de E contenant au moins un vecteur non nul de \mathcal{R} ; établir l'existence dans $D \cap \mathcal{R}$ de $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ non nul tel que $x^2 + y^2 + z^2$ soit minimum et en déduire que $D \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u}$.

2°. Notant $\Delta = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ le produit mixte de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, on pose :

$$\vec{A} = \frac{1}{\Delta}(\vec{b} \wedge \vec{c}), \quad \vec{B} = \frac{1}{\Delta}(\vec{c} \wedge \vec{a}), \quad \vec{C} = \frac{1}{\Delta}(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

(a) Exprimer simplement le produit scalaire $(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \mid \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C})$.

(b) Montrer que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ forme une base de E .

3°. Soit P un *plan réticulaire* de \mathcal{R} , c'est-à-dire un plan vectoriel de E contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants de \mathcal{R} ; montrer l'existence d'un couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs linéairement indépendants de $P \cap \mathcal{R}$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2$ soit minimum lorsque $\vec{u} \wedge \vec{v} = X\vec{A} + Y\vec{B} + Z\vec{C}$, et en déduire que $P \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$.

4°. Dans ce qui suit, P désigne un plan réticulaire de \mathcal{R} , comme défini ci-dessus.

(a) Établir l'existence d'un triplet (α, β, γ) de nombres entiers relatifs premiers entre eux et tels que, pour $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, on ait :

$$[\vec{w} \in P \cap \mathcal{R}] \iff [(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0].$$

(b) Étant donné un tel triplet (α, β, γ) , on définit pour $k \in \mathbb{Z}$ les plans affines \mathcal{P}_k d'équations $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; montrer que les $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$ définissent une partition de l'ensemble \mathcal{R} .

(c) Exprimer la distance entre \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_{k+1} à l'aide de $\vec{N} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$.