SESSION 1999

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

Partie I : Étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Soit (u_n) une suite réelle, de signe alterné, dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Alors, la série de terme général u_n converge (critère spécial aux séries alternées). De plus, si R_n désigne le reste à l'ordre n (c'est-à-dire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$) alors, R_n est du signe de son premier terme u_{n+1} et la valeur absolue de R_n est majorée par la valeur absolue de son premier terme u_{n+1}.

La suite $\left(\frac{(-1)^p}{p}\right)$ vérifie les conditions précédentes ce qui montre que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente.

b) Soient n et N deux entiers naturels tels que $1 \leq n < N$.

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{N} \frac{(-1)^p}{p} &= \sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p \int_0^1 x^{p-1}\, dx = -\int_0^1 \left(\sum_{p=n+1}^{N} (-x)^{p-1}\right) dx = -\int_0^1 (-x)^n \frac{1-(-x)^{N-n}}{1-(-x)}\, dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\, dx \ (*)\end{aligned}$$

Or,

$$\left|(-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\, dx\right| = \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\, dx \leq \int_0^1 x^N\, dx = \frac{1}{N+1},$$

et comme $\frac{1}{N+1}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que $(-1)^N \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\, dx$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Quand N tend vers $+\infty$ à n fixé, $(*)$ fournit $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx.$$

Or,

$$0 \leq \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx \leq \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+0)^2}\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Maintenant, $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^{-1} = \dfrac{1}{n}(1+O(\dfrac{1}{n})) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Finalement,

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

b) La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. La série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge absolument et donc converge. On en déduit que la série de terme général R_n converge.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} R_p &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n}(-x)^p\right)\frac{1}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Or,

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} R_p$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\frac{1}{2}.}$$

Partie II : Étude de $r_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $V_n = U_n - \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$. On sait que la suite (V_n) est de même nature que la série de terme général $V_{n+1} - V_n$. Or,

$$\begin{aligned}V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = -\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de RIEMANN d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$) et donc la série de terme général $V_{n+1} - V_n$ converge. On en déduit que la suite (V_n) converge. On note $L+2$ sa limite (ainsi $L = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n - 2$).

b) Puisque $\theta > 1$, pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ existe.

Soient n et N deux entiers naturels tels que $1 \le n < N$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\theta}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Par suite, pour $n+1 \le p \le N$, on a

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \le \frac{1}{p^\theta} \le \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x^\theta}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dx}{x^\theta} = \sum_{p=n+1}^{N} \int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \le \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^\theta} \le \sum_{p=n+1}^{N} \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x^\theta} = \int_n^N \frac{dx}{x^\theta},$$

et donc,

$$\frac{1}{\theta-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\theta-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\theta-1}}\right) \le \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^\theta} \le \frac{1}{\theta-1}\left(\frac{1}{n^{\theta-1}} - \frac{1}{N^{\theta-1}}\right).$$

Quand N tend vers $+\infty$ à n fixé, on obtient (puisque $\theta - 1 > 0$),

$$\frac{1}{(\theta-1)(n+1)^{\theta-1}} \le \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \le \frac{1}{(\theta-1)n^{\theta-1}}.$$

Mais alors, $(\theta-1)n^{\theta-1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\theta-1)n^{\theta-1}}.}$$

2) **a)** Notons tout d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = U_n - 2(\sqrt{n} - \sqrt{1}) - L - 2 = U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} - (L+2) = V_n - (L+2).$$

Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et de plus

$$v_n - v_{n+1} = V_n - V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}} > 0.$$

Ainsi, la série de terme général $v_n - v_{n+1}$ converge et de plus, d'après la règle de l'équivalence des restes à l'ordre n de séries à termes positifs convergentes, on a

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (v_p - v_{p+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{3}{2}-1)n^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ (d'après 1)b)).}$$

Maintenant, $\sum_{p=n+1}^{N} (v_p - v_{p+1}) = v_{n+1} - v_{N+1} \to v_{n+1}$ quand N tend vers $+\infty$ à n fixé. Donc, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (v_p - v_{p+1}) = v_{n+1}$.

Ainsi, $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$, puis, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.}$$

b) De même, posons $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= (v_n - v_{n+1}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} - \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{2\sqrt{n} - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^3} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{16n^{5/2}}, \end{aligned}$$

et donc, comme à la question précédente,

$$w_{n+1} = \sum_{p=n+1}^{+\infty}(w_p - w_{p+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{16}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^{5/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{16}\frac{1}{\frac{3}{2}n^{3/2}} = -\frac{1}{24n\sqrt{n}},.$$

et donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{24n\sqrt{n}}$. Ainsi, $v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).}$$

3) a) La suite $\left(\dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}}\right)$ est de signe alterné, et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Par suite, la série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. D'où l'existence de S.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$r_{2n} = S - \sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S - \left(-\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{p}} + 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2p}}\right) = S + U_{2n} - \frac{2}{\sqrt{2}}U_n = S + U_{2n} - \sqrt{2}U_n.$$

$$\boxed{r_{2n} = S + U_{2n} - \sqrt{2}U_n.}$$

c) D'après 2)a), quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} r_{2n} &= S + \left(2\sqrt{2n} + L + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= S + (1-\sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge, on sait que r_n existe et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en particulier, r_{2n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci impose $S + (1-\sqrt{2})L = 0$, ou encore

$$\boxed{S = (\sqrt{2}-1)L.}$$

Mais alors, $r_{2n} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Ensuite,

$$r_{2n+1} = r_{2n} - \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}).$$

En résumé, quand n tend vers $+\infty$,

$$r_{2n} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{(-1)^{2n}}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{2n\sqrt{2n}}\right)$$

et

$$r_{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2\sqrt{2n+1}} + O\left(\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{r_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}).}$$

La série de terme général $-\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument et donc converge. On en déduit que la série de terme général r_n converge.

Partie III : Étude de $q_n(x) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$, $x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $u = pt$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^{x-1} e^{-u}\,\frac{du}{p} = \frac{1}{p^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(x)}{p^x}.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\Gamma(x) > 0$ et donc que $\dfrac{1}{p^x} = \dfrac{1}{\Gamma(x)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-pt}\,dt$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-pt}\,dt.}$$

2) Soit $x \in]0, +\infty[$. Soient n et N deux entiers naturels tels que $n < N$.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=n+1}^{N} \frac{(-1)^p}{p^x} &= \sum_{p=n+1}^{N} (-1)^p \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-pt}\,dt = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\sum_{p=n+1}^{N}(-e^{-t})^p\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}(-e^{-t})^{n+1}\frac{1-(-e^{-t})^{N-n}}{1-(-e^{-t})}\,dt \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt + \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt.
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\left|\frac{(-1)^N}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt\right| = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt \leq \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(N+1)t}\,dt = \frac{1}{(N+1)^x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+1)^x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt = 0$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient alors

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ q_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt.}$$

3) Soient $x \in]0, +\infty[$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=0}^{N} q_n(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^{-t}}\sum_{n=0}^{N}(-e^{-t})^{n+1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}(-e^{-t})}{1+e^{-t}} \times \frac{1-(-e^{-t})^{N+1}}{1+e^{-t}}\,dt.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2}(-e^{-t})^{N+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, dominée en 0 par t^{x-1} qui est intégrable au voisinage de 0 car $x - 1 > -1$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2}(-e^{-t})^{N+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{N} q_n(x) = -\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt - \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2}(-e^{-t})^{N+2}\,dt.$$

Maintenant,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2}(-e^{-t})^{N+2}\,dt\right| = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(N+2)t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt \leq \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(N+2)t}\,dt = \frac{1}{(N+2)^x}.$$

Comme $\dfrac{1}{(N+2)^x}$, tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $\dfrac{1}{\Gamma(x)}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+e^{-t})^2}(-e^{-t})^{N+2}\,dt$. Ceci montre la convergence de la série de terme général $q_n(x)$. De plus, quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(x) = -\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt.}$$

4) On applique ce qui précède à $x = 1$. Avec les notations de I.3), en posant $u = e^{-t}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(1) = -\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \int_1^{0} \frac{1}{(1+u)^2}\,du = -\frac{1}{2}.$$

Partie IV : Étude de $x_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p(f(p) - f(p+1))$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ convient et plus généralement les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^\theta}$, $\theta > 0$, conviennent.

b) La suite $((-1)^p f(p))$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc, pour tout entier naturel n, x_n existe en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p(f(p) - f(p+1)) &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{p=n+2}^{\infty} (-1)^{p-1} f(p)\\ &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{N+1} (-1)^p f(p) = 2\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - (-1)^{n+1}f(n+1)\\ &= 2x_n - (-1)^{n+1}f(n+1).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2x_n - (-1)^{n+1}f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p(f(p) - f(p+1)).}$$

Ainsi, $x_n = \dfrac{1}{2}((-1)^{n+1}f(n+1) + \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p(f(p) - f(p+1)))$. Déjà, la série de terme général $(-1)^{n+1}f(n+1)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Montrons alors que la série de terme général $y_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p(f(p) - f(p+1))$ converge.

La fonction f est convexe sur $]0,+\infty[$. Donc, pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{2}(f(p) + f(p+2)) \geq f(\frac{1}{2}(p+p+2)) = f(p+1).$$

Ceci s'écrit encore $\forall p \in \mathbb{N},\ f(p) + f(p+2) \geq 2f(p+1)$ ou enfin $\forall p \in \mathbb{N},\ f(p) - f(p+1) \geq f(p+1) - f(p+2)$. Ainsi, la suite $(f(p) - f(p+1))$ est décroissante. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, on a alors

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1))\right| \leq |(-1)^{n+1}(f(n+1)-f(n+2))| = f(n+1)-f(n+2).$$

Maintenant, la série de terme général $f(n+1)-f(n+2)$ est de même nature que la suite de terme général $f(n+1)$ et est donc convergente (série télescopique). On en déduit que la série de terme général $y_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1))$ est absolument convergente et donc convergente. Finalement,

$$\boxed{\text{La série de terme général } x_n \text{ converge.}}$$

3) Quand n tend vers $+\infty$, $f(n+1)$ est équivalent à $f(n+2)$ et donc $f(n+1)-f(n+2) = o(f(n+1))$. Or, d'après la question précédente, $\left|\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1))\right| \leq f(n+1)-f(n+2)$. Par suite,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1)) \underset{n\to+\infty}{=} o(f(n+1)),$$

et donc

$$x_n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1}f(n+1)+\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1))\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}f(n+1)}{2}+o(f(n+1)) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}f(n)}{2}+o(f(n))$$

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}f(n)}{2}.}$$

Partie V : Étude de $q_0(x)$

1) Soit a un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,+\infty[$, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|q_n(x)| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup\left\{\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}\right|,\ x\in[a,+\infty[\right\} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Comme $\dfrac{1}{(n+1)^a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup\{|q_n(x)|,\ x\in[a,+\infty[\} = 0$ et donc la série de fonction de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^p}{p^x}$ converge uniformément vers q_0 sur $[a,+\infty[$. Comme chaque f_n est continue sur $[a,+\infty[$, la fonction q_0 est continue sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout réel $a>0$. Finalement

$$\boxed{\text{la fonction } q_0 \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

2) Soit a un réel strictement positif. Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et pour $x\in[a,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}.$$

Pour $x \geq a$ et $t \geq 1$, posons alors $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^x}$. g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $t \geq 1$,

$$g'(t) = \frac{t^{x-1} - xt^{x-1}\ln t}{t^{2x}} = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}.$$

g' est négative sur $[\dfrac{1}{x} + \infty[$ et en particulier sur $[\dfrac{1}{a}, +\infty[$. La fonction g est donc décroissante sur $[\dfrac{1}{a}, +\infty[$. On en déduit qu'à partir du rang $E(\dfrac{1}{a})+1$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^x} = 0$, la série de terme général $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^x}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées. Ensuite, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \geq E(\dfrac{1}{a}) + 1$,

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln p}{p^x}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a},$$

et donc, pour $n \geq E(\dfrac{1}{a}) + 1$,

$$\sup\left\{\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}\right|,\ x \in [a, +\infty[\right\} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers q_0 sur $[a, +\infty[$;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, q_0 est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et la dérivée de q_0 s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$,

$$\boxed{q_0 \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et pour } x > 0,\ q'_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}.}$$

3) D'après la question V.1), la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers q_0 sur $[1, +\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} q_0(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} q_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} q_0(x) = -1.}$$

4) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est convexe, décroissante sur $]0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. D'après IV.2), on a

$$q_0(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x}\right)\right).$$

D'après une majoration classique de toute somme de série alternée, pour $x > 0$ on a

$$\left|\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p^x} - \frac{1}{(p+1)^x}\right)\right| \leq \left|(-1)^1\left(\frac{1}{1^x} - \frac{1}{2^x}\right)\right| = 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{2^x}=1-1=0$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\dfrac{1}{p^x}-\dfrac{1}{(p+1)^x}\right)=0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} q_0(x)=-\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On peut prolonger } q_0 \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } q_0(0)=-\frac{1}{2}.}$$

5) a) Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= \frac{1}{2}\left(-1+\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{p^x}-\frac{1}{(p+1)^x}\right)\right)=q_0(0)+\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{1}{x}\left(\frac{1}{p^x}-\frac{1}{(p+1)^x}\right)\\
&= q_0(0)+\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[-\frac{1}{xt^x}\right]_p^{p+1}=q_0(0)+\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x>0$, $q_0(x)=q_0(0)+\dfrac{x}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$ ce qui reste vrai pour $x=0$.

$$\boxed{\forall x\in[0,+\infty[,\ q_0(x)=q_0(0)+\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}.}$$

b) Soit x un réel strictement positif. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{q_0(x)-q_0(0)}{x-0}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}.$$

$\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$ tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}\right|\leq\int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t^{x+1}}\leq\int_{n+1}^{n+2}\frac{dt}{t}=\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

Comme $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ est une expression indépendante de x et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série de fonctions de terme général $x\mapsto(-1)^p\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$ est uniformément convergente sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a alors

$$\lim_{x\to 0}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\lim_{x\to 0}\frac{dt}{t^{x+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{dt}{t}=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Finalement

$$\boxed{q_0 \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } q_0'(0)=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).}$$

6) La série de terme général $(-1)^p\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$ converge. Donc la suite $\left(\sum\limits_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ extraite de la suite des sommes partielles converge et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)=\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$. Or pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) &= \sum_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)\\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 3\times 2\times(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^4}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{4n}n!^4}\right),\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!(2n)!}{2^{4n}n!^4} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}\times\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(2\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{e}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\frac{1}{\pi n}\\ &= \frac{2}{\pi e}e^{(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ et } q_0'(0) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

