

Partie A - Construction d'une fonction test

Q 1. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Par suite, la fonction φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. La fonction φ est aussi de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et finalement sur $\mathbb{R}^*$.

Q 2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

- Pour tout réel $x > 0$, $\varphi^{(0)}\left(\frac{1}{x}\right) = P_0\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ avec $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

Alors, pour tout $x > 0$,

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

avec $P_{n+1} = X^2 (P_n - P_n') \in \mathbb{R}[X]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

Q 3. La fonction φ est de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ est n fois dérivable en 0 et que la fonction $\varphi^{(n)}$ est continue en 0.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = \varphi(0)$. La fonction φ est continue à droite en 0 puis la fonction φ est continue en 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la fonction φ est n fois dérivable en 0 et que la fonction $\varphi^{(n)}$ est continue en 0. La fonction φ est $n+1$ fois dérivable à gauche en 0 et de plus, $\varphi_g^{(n+1)}(0) = 0$. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{(n+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} P_{n+1}(y) e^{-y} = 0.$$

Ainsi, $\varphi^{(n)} \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $(\varphi^{(n)})' = \varphi^{(n+1)}$ a une limite réelle en 0 à droite, à savoir 0.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\varphi^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Par suite, φ est $n+1$ fois dérivable à droite en 0 et de plus, $\varphi_d^{(n+1)}(0) = 0 = \varphi_g^{(n+1)}(0)$. Mais alors, la fonction φ est $n+1$ fois dérivable en 0 et la fonction $\varphi^{(n+1)}$ est continue en 0.

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. puis que la fonction φ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi_{a,b}(x) = \varphi((x-a)(b-x))$. Puisque $(x-a)(b-x) > 0$ si et seulement si $x \in]a, b[$, la fonction $\psi_{a,b}$ est strictement positive sur $]a, b[$ et nulle sur $\mathbb{R} \setminus]a, b[$. Ensuite, la fonction $f_{a,b} : x \mapsto (x-a)(b-x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $\psi_{a,b} = \varphi \circ f_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\psi_{a,b}$ convient.

Q 5. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $\psi_{-1,1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur un voisinage de $-\infty$ et sur un voisinage de $+\infty$. Donc, la fonction $\psi_{-1,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(x) dx > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). On en déduit que la fonction ρ_ε est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $\psi_{-1,1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Donc, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q 6. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) \, du$. Ensuite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) \, dx = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dx}{\varepsilon} = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) \, du = 1.$$

Q 7. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

a) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{I} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) g(x) \frac{dx}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{I} \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u) \, du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{I} \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u) \, du. \end{aligned}$$

On pose $\Phi :]0, +\infty[\times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) \, dx = \int_{-1}^1 \Phi(\varepsilon, u) \, du$.

$$(\varepsilon, u) \mapsto \frac{1}{I} \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u)$$

- Pour tout $\varepsilon \in]0, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \Phi(\varepsilon, u)$ est continue par morceaux sur $[-1, 1]$.
 - Pour tout $u \in [-1, 1]$, la fonction $\Phi(\varepsilon, u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{I} \psi_{-1,1}(u) g(0) = \ell(u)$ et de plus, la fonction $u \mapsto \ell(u)$ est continue par morceaux sur $[-1, 1]$.
 - La fonction g est continue sur le segment $[-1, 1]$ et en particulier, la fonction g est bornée sur le segment $[-1, 1]$.
- Pour tout $(\varepsilon, u) \in]0, +\infty[\times [-1, 1]$, $|\Phi(\varepsilon, u)| \leq \frac{1}{I} \psi_{-1,1}(u) \|g\|_{\infty, [-1, 1]} = \varphi$ où de plus, φ est une fonction continue, positive et intégrable sur $[-1, 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre, la fonction $\varepsilon \mapsto \int_{-1}^1 \Phi(\varepsilon, u) \, du$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures et de plus,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \Phi(\varepsilon, u) \, du = \int_{-1}^1 \ell(u) \, du = \frac{g(0)}{I} \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) \, du = g(0).$$

On a montré que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) \, dx = g(0)$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_a(x) = g(x + a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x - a) g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(u) g(u + a) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(u) g_a(u) \, du$$

puis, la fonction g_a étant continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x - a) g(x) \, dx = g_a(0) = g(a)$.

Partie B - Distribution sur $\mathbb{R}$

Soit K un segment de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(i)}$ est continue et donc bornée sur le segment K . Par suite, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|\varphi^{(i)}\|_\infty = \|\varphi^{(i)}\|_{\infty, K} < +\infty$.

Q 8. Vérifions que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

La forme nulle est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (pour tout segment K , on prend $C_K = 1$ et $N_K = 0$).

Soient $(T_1, T_2) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout segment K , li existe $(C_{1,K}, C_{2,K}) \in]0, +\infty[^2$ et $(N_{1,K}, N_{2,K}) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T_1(\varphi)| \leq C_{1,K} \max_{i \in [0, N_{1,K}]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$ et $|T_2(\varphi)| \leq C_{2,K} \max_{i \in [0, N_{2,K}]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$.

Soient $C = (|\lambda| + 1)C_{1,K} + |\mu|C_{2,K} > 0$ et $N = \max\{N_{1,K}, N_{2,K}\} \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$,

$$\begin{aligned}
|(\lambda T_1 + \mu T_2)(\varphi)| &\leq |\lambda| |T_1(\varphi)| + |\mu| |T_2(\varphi)| \\
&\leq |\lambda| C_{1,K} \max_{i \in \llbracket 0, N_{1,K} \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty + |\mu| C_{2,K} \max_{i \in \llbracket 0, N_{2,K} \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty \leq (|\lambda| C_{1,K} + |\mu| C_{2,K}) \max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty \\
&\leq C \max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda T_1 + \mu T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a montré que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Q 9. *Un premier exemple.* Soient $(f, g) \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\delta_a(\lambda f + \mu g) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda \delta_a(f) + \mu \delta_a(g).$$

Donc, δ_a est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit K un segment de $\mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_\infty$. Donc, si $C_K = 1 > 0$ et $N_K = 0$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in \llbracket 0, N_K \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$.

On a montré que δ_a est une distribution.

Q 10. *Un deuxième exemple.* Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La fonction $f\varphi$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est nulle sur un voisinage de $+\infty$ et sur un voisinage de $-\infty$. Donc, la fonction $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $T_f(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, T_f est bien une application de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
T_f(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\lambda \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(t)) dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_1(t) dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_2(t) dt \\
&= \lambda T_f(\varphi_1) + \mu T_f(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Donc, T_f est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit K un segment de $\mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$,

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_K f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \int_K |f(t)| |\varphi(t)| dt \leq \left(\int_K |f(t)| dt + 1 \right) \|\varphi\|_\infty.$$

Soi on pose $C_K = \int_K |f(t)| dt + 1 > 0$ et $N_K = 0$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T_f(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in \llbracket 0, N_K \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$.

On a montré que T_f est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Q 11. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T_{f_1} = T_{f_2}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \varphi(t) dt$.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x-a) f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x-a) f_2(t) dt$ (car la fonction $x \mapsto \rho_\varepsilon(x-a)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'après la question **Q5**). Puisque f_1 et f_2 sont continues sur $\mathbb{R}$, quand ε tend vers 0, on obtient $f_1(a) = f_2(a)$ d'après la question **Q7**.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_1(a) = f_2(a)$ et donc $f_1 = f_2$.

Q 12. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, $\int_0^1 \varphi'(xt) dt = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \varphi(1) - \varphi(0) = \psi(0)$.

Si $x \neq 0$, $\int_0^1 \varphi'(xt) dt = \left[\frac{\varphi(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \psi(x)$.

On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xt) dt$.

b) Posons $\Gamma : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_0^1 \Gamma(x, t) dt$.
 $(x, t) \mapsto \varphi'(xt)$

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Gamma(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$.
- Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \Gamma(x, t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \frac{\partial^k \Gamma}{\partial x^k}(x, t) = t^k \varphi^{(k+1)}(xt).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k \Gamma}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial^k \Gamma}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \int_0^1 |\varphi^{(k+1)}(xt)| dt \leq \|\varphi^{(k+1)}\|_\infty$ où la fonction $t \mapsto \|\varphi^{(k+1)}\|_\infty$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k \varphi^{(k+1)}(xt) dt$).

Q 13. a) Soit $A > 0$ tel que φ soit nulle en dehors de $K = [-A, A]$. Soit $\varepsilon \in]0, A]$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{-A}^{-\varepsilon} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx + \int_{\varepsilon}^A \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx \\ &= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx + \varphi(0)(\ln(\varepsilon) - \ln(A) + \ln(A) - \ln(\varepsilon)) \\ &= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Puisque la fonction ψ est continue sur le segment $[-A, A]$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$ existe dans $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \int_{-A}^A \psi(x) dx.$$

b) V est une application de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Soient $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $A > 0$ telles que les fonctions φ_1 et φ_2 soient nulle en dehors de $[-A, A]$ puis

$$V(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \int_{-A}^A (\lambda\psi_1(x) + \mu\psi_2(x)) dx = \lambda \int_{-A}^A \psi_1(x) dx + \mu \int_{-A}^A \psi_2(x) dx = \lambda V(\varphi_1) + \mu V(\varphi_2).$$

V est donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit K un segment de $\mathbb{R}$ puis $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

$$\begin{aligned} |V(\varphi)| &= \left| \int_{-A}^A \psi(x) dx \right| = \left| \int_{-A}^A \left(\int_0^1 \varphi'(xt) dt \right) dx \right| \\ &\leq \int_{-A}^A \left(\int_0^1 |\varphi'(xt)| dt \right) dx \\ &\leq \|\varphi'\|_\infty \int_{-A}^A \left(\int_0^1 dt \right) dx = 2A \|\varphi'\|_\infty \\ &\leq 2A \max(\|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty). \end{aligned}$$

avec $C_K = 2A > 0$. Donc, V est une distribution.

Partie C - Dérivation d'une distribution

Q 14. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, φ' est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puis T' est une application de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. T' est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de T . T' est donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit K un segment de $\mathbb{R}$. Soient $C_K > 0$ et $N_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in \llbracket 0, N_K \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Alors $\varphi' \in \mathcal{D}(K)$ puis

$$\begin{aligned} |T'(\varphi)| &= |T(\varphi')| \\ &\leq C_K \max_{i \in \llbracket 0, N_K \rrbracket} \|(\varphi')^{(i)}\|_\infty \\ &\leq C_K \max_{i \in \llbracket 0, N_K+1 \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty. \end{aligned}$$

On pose $C_K' = C_K > 0$ et $N_K' = N_K + 1 \in \mathbb{N}$ et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T'(\varphi)| \leq C_K' \max_{i \in \llbracket 0, N_K' \rrbracket} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$. On a montré que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Q 15. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Soient K un segment de $\mathbb{R}$ puis $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Soit $A > 0$ tel que φ est nulle en dehors de $] -A, A[$. Les deux fonctions f et φ sont de classe C^1 sur le segment $[-A, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t) dt = -\int_{-A}^A f(t)\varphi'(t) dt \\ &= -[f(t)\varphi(t)]_{-A}^A + \int_{-A}^A f'(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) dt \\ &= T_{f'}(\varphi) \end{aligned}$$

et donc $T_f' = T_{f'}$.

Q 16. (a) Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1$. Le taux $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite en 0 et donc la fonction f n'est pas dérivable en 0. Par suite, la fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Deux intégrations par parties licites fournissent

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^0 t\varphi'(t) dt - \int_0^{+\infty} t\varphi'(t) dt \\ &= [t\varphi(t)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt - [t\varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} \frac{|t|}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$. Donc, $T_f' = T_{\operatorname{sgn}}$.

Q 17. H est continue par morceaux sur tout segment K de $\mathbb{R}$ (car continue sur K sauf peut-être en un point (le point 0) en lequel H a une limite réelle à gauche et une limite réelle à droite) et donc H est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} T_H'(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \\ &= \varphi(0) \end{aligned}$$

et donc $T_H' = \delta_0$.

Q 18. a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T(\varphi') = -T'(\varphi) = 0$.

b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $A > 0$ tel que φ soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle sur un voisinage de $-\infty$. On peut donc poser pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$. De plus, ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi^{(k)} = \varphi^{(k-1)}$). Ensuite, si $x \leq -A$, $\psi(x) = 0$ et si $x \geq A$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^A \varphi(t) dt + \int_A^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^A \varphi(t) dt + \int_A^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0.$$

Donc, ψ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puis $T(\psi') = 0$ d'après la question précédente ou encore $T(\varphi) = 0$.

c) $\varphi_0 = \rho_1$ (définie à la question **Q5**) convient.

d) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ puis $\varphi_1 = \varphi - I\varphi_0$. φ_1 est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et de plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt - I \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt = 0.$$

D'après la question précédente, $T(\varphi_1) = 0$ ou encore, par linéarité de T , $T(\varphi) = T(\varphi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$.

e) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $h(t) = T(\varphi_0)$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$T(\varphi) = T(\varphi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t) dt = T_h(\varphi).$$

Donc, si $T' = 0$, il existe une fonction constante h telle que $T = T_h$.

Q 19. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, telle que $T'_f = 0$. D'après la question précédente, il existe une fonction constante h telle que $T_f = T_h$. D'après la question **Q11**, $f = h$ ou encore f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est constante sur $\mathbb{R}$, en particulier f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis, d'après la question **Q15**, $T'_f = T_{f'} = T_0 = 0$.

Les applications f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = 0$ sont les applications constantes.

Q 20. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $(T'_f)' = T''_f = 0$. Il existe une fonction constante $h : t \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) telle que $T'_f = T_h$. Soit $g : t \mapsto at$. Puisque g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $T'_g = T'_g = T_h = T'_f$ puis

$$T'_{f-g} = (T_f - T_g)' = T'_f - T'_g = 0.$$

Puisque $f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $T'_{f-g} = 0$, on en déduit que $f - g$ est constante puis que f est affine.

Réciproquement, si $f : t \mapsto at + b$ est affine, alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis $T''_f = T'_{t \mapsto a} = 0$.

Les applications f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T''_f = 0$ sont les applications affines.

Q 21. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, g admet au moins une primitive G sur $\mathbb{R}$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$.

Q 22. Puisque G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $T'_G = T_{G'} = T_g = T'_f$ puis $T'_{f-G} = 0$

Q 23. Mais alors, $f - G$ est constante sur $\mathbb{R}$ puis f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f' = g$.

Partie D - Suite de distributions

Q 24. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T'_n(\varphi) = -T_n(\varphi')$ puis $T'_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -T(\varphi') = T'(\varphi)$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T'_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} T'$.

Q 25. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, nulle sur $\left] \frac{1}{n}, +\infty \right[$, affine sur $\left[0, \frac{1}{n} \right]$ telle que $f_n(0) = (-1)^n$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left] -\infty, -\frac{1}{n} \right[\\ (-1)^n(1 + nt) & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{n}, 0 \right[\\ (-1)^n(1 - nt) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n} \right[\\ 0 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n}, +\infty \right[\end{cases}.$$

La suite $(f_n(0))_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$ diverge et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\varphi)| &= \left| \int_{-\frac{1}{n}}^0 (-1)^n (1 + nt) \varphi(t) \, dt + \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt) \varphi(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^0 |\varphi(t)| \, dt + \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)| \, dt \\ &\leq \frac{2}{n} \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n}(\varphi) = 0$. Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n}(\varphi) = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} 0$.

Q 26. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $A > 0$ tel que φ est nulle en dehors de $[-A, A]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| = \left| \int_{-A}^A (f_n(t) - f(t)) \varphi(t) \, dt \right| \leq 2A \|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$$

Puisque $2A \|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $T_{f_n}(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_f(\varphi)$.

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Q 27. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. φ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(t) - f(t)) \varphi(t) \, dt \right| \leq \sqrt{\int_{-A}^A (f_n(t) - f(t))^2 \, dt} \sqrt{\int_{-A}^A (\varphi(t))^2 \, dt} = \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Par hypothèse, $\|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $T_{f_n}(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_f(\varphi)$. Encore une fois, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Partie E - Une application, le théorème d'unicité de Cantor

Q 28. (a) Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge et en particulier la série de terme général $a_n = a_n \cos(n \times 0) + b_n \sin(n \times 0)$ converge. Mais alors, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Soit $x \in [0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n \cos(nx)| \leq |a_n|$ et donc d'après le théorème des gendarmes, $a_n \cos(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'autre part, puisque la série de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge, on a en particulier $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais alors, $b_n \sin(nx) = (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) - a_n \cos(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(c) La suite $(b_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|b_n| \geq \varepsilon$ ($\star$).

En particulier, il existe un entier $\varphi(1) \geq 1$ tel que $|b_{\varphi(1)}| \geq \varepsilon$. Soit $n \geq 1$. Supposons avoir construit des entiers $\varphi(k)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tels que $1 \leq \varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(n)$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|b_{\varphi(k)}| \geq \varepsilon$. Alors, en appliquant ($\star$) à l'entier $n_0 = \varphi(n) + 1$, il existe un entier que l'on note $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ et $|b_{\varphi(n+1)}| \geq \varepsilon$.

On a construit par récurrence une suite strictement croissante $(\varphi(n))_{n \geq 1}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon$.

(d) Soit $x \in [0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^2(\varphi(n)x) \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (b_{\varphi(n)} \sin(\varphi(n)x))^2$. Ensuite, la suite $(b_n \sin(nx))$ converge vers 0 et donc, la suite extraite $(b_{\varphi(n)} \sin(\varphi(n)x))$ converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(\sin^2(\varphi(n)x))$ converge vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (\sin(\varphi(n)x))^2$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2\pi]$ et la fonction nulle est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 2\pi]$, $|f_n(x)| \leq 1$ où la fonction $x \mapsto 1$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx\right)$ converge et de plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\varphi(n)x) dx = 0.$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\varphi(n)x)) dx = \pi - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\varphi(n)x)}{2\varphi(n)} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Ceci contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx = 0$. On a donc prouvé par l'absurde que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Q 29. Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((n-k)x) + \cos((n+k)x)) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$.
 $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((n-k)x) - \cos((n+k)x)) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$ et enfin $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin((n-k)x) + \sin((n+k)x)) dx = 0$ dans tous les cas.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(kx)$ puis, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

• Chaque fonction f_n est continue sur $[0, 2\pi]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $|f_n(x)| \leq |a_n| + |b_n|$ puis $\|f_n\|_\infty \leq |a_n| + |b_n|$. Par hypothèse la série de terme général $|a_n| + |b_n|$ converge et donc la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge. Mais alors, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$, la série de terme général $\int_0^{2\pi} f_n(x) dx$ converge et de plus, en tenant compte de $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,k} a_n = \pi a_k.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = 0$. De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin(kx) dx = \pi b_k$$

et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = 0$.

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} (|a_n| + |b_n|)$ puis $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2} (|a_n| + |b_n|)$. D'après la question **Q28**, $\frac{1}{n^2} (|a_n| + |b_n|) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.

Ceci montre que la série de fonctions de termes général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ et en particulier, uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 31. D'après la question **Q26**, puisque chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers la fonction F sur $\mathbb{R}$, $T_F \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} T_{f_n}$. Ensuite, puisque chaque fonction f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$,

d'après la question **Q15**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_{f_n})'' = T_{f_n}''$. Donc, d'après la question **Q24**, $(T_F)'' \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{f_n})'' \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} T_{f_n}''$

ou encore, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(T_F)''(\varphi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} T_{f_n}''(\varphi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(- \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \varphi(x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Je n'ai pas réussi à montrer dans le cadre du problème que cette limite est nulle et j'admets donc que $(T_F)'' = 0$.

Puisque $(T_F)'' = 0$ et que F est continue sur $\mathbb{R}$, F est affine d'après la question **Q20**.

Q 32. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|a_n|}{n^2} + \frac{|b_n|}{n^2} \right) \in \mathbb{R}$ car $\frac{|a_n|}{n^2} + \frac{|b_n|}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'après la question **Q28**. Donc, F est bornée. Etant affine, F est constante.

Q 33. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) = \lambda$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ et en particulier converge uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$2\pi\lambda = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \frac{b_n}{n^2} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right) = 0.$$

Donc, $\lambda = 0$ puis F est la fonction nulle.

Q 34. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) = F(x) = 0$ et de plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^2} < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n^2} < +\infty$.

D'après la question **Q29**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0$ puis $a_n = b_n = 0$.