SESSION 2018

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

Partie I - Préliminaires

On note $(u|v)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

I.A - Projection sur un convexe fermé

Q1. Soit $(a, b) \in E^2$.

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a|b) + \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2(a|b) + \|b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right).$$

Cette identité est l'identité du parallélogramme. Elle signifie que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

Q2. On applique l'identité de la question précédente à $a = \dfrac{u-v}{2}$ et $b = \dfrac{u-v'}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2 &= 2\left(\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v'}{2}\right\|^2\right) - \left\|\frac{v'-v}{2}\right\|^2 \\ &= 2\left(\frac{2}{4}\|u-v\|^2\right) - \left\|\frac{v'-v}{2}\right\|^2 = \|u-v\|^2 - \left\|\frac{v'-v}{2}\right\|^2 \\ &< \|u-v\|^2 \text{ (car } v \neq v'),\end{aligned}$$

et donc $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$.

Q3. $\mathscr{E} = \{\|u-w\|,\ w \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et même de $\mathbb{R}^+$. On en déduit que $\mathscr{E}$ admet une borne inférieure d qui est un réel positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n \in F$ tel que $d \leqslant \|u - w_n\| \leqslant d + \dfrac{1}{n+1}$. Ceci entraine en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|w_n\| \leqslant \|u\| + \|w_n - u\| \leqslant \|u\| + d + \frac{1}{n+1} \leqslant \|u\| + d + 1.$$

Donc, la suite w est bornée. Puisque E est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut extraire de la suite w une suite $\left(w_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant vers un certain élément v de E. Puisque F est fermé et que $\left(w_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$, on sait que v est un élément de F.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d \leqslant \left\|u - w_{\varphi(n)}\right\| \leqslant d + \dfrac{1}{\varphi(n)+1}$. Quand n tend vers $+\infty$, par continuité de l'application $x \mapsto \|x\|$, on obtient

$$d \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left\|u - w_{\varphi(n)}\right\| = \left\|u - \lim_{n\to+\infty} w_{\varphi(n)}\right\| = \|u-v\| \leqslant d.$$

v est un élément de F tel que pour tout $w \in F$, $\|u-v\| = d \leqslant \|u-w\|$.

Q4. On suppose de plus que F est convexe. Montrons que v est unique. Soit $v' \in F$ tel que pour tout $w \in F$, $\|u-v'\| \leqslant \|u-w\|$. On a alors $\|u-v\| \leqslant \|u-v'\|$ et $\|u-v' \leqslant \|u-v\|$ et donc $\|u-v\| = \|u-v'\|$.

Puisque F est convexe et que v et v' sont dans F, $w = \dfrac{v+v'}{2}$ est dans F et vérifie

$$\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| = \|u-w\| \geqslant \|u-v\|.$$

La question Q2 montre qu'on ne peut avoir $v \neq v'$ et donc $v = v'$. Ceci montre l'unicité de v.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Q5. Soient a et b deux réels positifs. L'inégalité à démontrer est claire quand $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose dorénavant $a > 0$ et $b > 0$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$ car deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée seconde $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ négative sur $]0, +\infty[$. Puisque $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{q}$ sont deux réels strictement positifs de somme 1, on a

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

et donc $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On a montré que pour tout $(a, b) \in [0, +\infty[^2$, $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Q6. Posons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$ où $x_1, \dots x_n$ sont deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_m$, sont deux à deux distincts. Supposons tout d'abord $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.

D'après la formule de transfert et la question Q5,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} |x_i y_j| \, P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_j|^q\right) P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \left(\sum_{j=1}^{m} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)\right) + \frac{1}{q}\left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q \left(\sum_{i=1}^{n} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right)\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \, P(X = x_i) + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q \, P(Y = y_j) \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{E}(|X|^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(|Y|^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&= (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder est donc démontrée dans le cas où $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$. Supposons maintenant $\mathbb{E}(|X|^p) > 0$ et $\mathbb{E}(|Y|^q) > 0$. Soient $X' = \dfrac{X}{(\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}}$ et $Y' = \dfrac{Y}{(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}}$. Alors,

$$\mathbb{E}(X'^p) = \mathbb{E}\left(\frac{X^p}{E(X^p)}\right) = 1$$

et de même, $\mathbb{E}(Y'^q) = 1$. Mais alors $\mathbb{E}\left(\left|\dfrac{XY}{(\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}}\right|\right) \leqslant 1$ puis $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}$.

Il reste à étudier le cas où l'un des deux nombres $\mathbb{E}(X^p)$ ou $\mathbb{E}(Y^q)$ est nul. Supposons par exemple que $\mathbb{E}(X^p) = 0$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \, P(X = x_i) = 0$$

puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i|^p \, P(X = x_i) = 0$. Si $x_i \neq 0$, on a nécessairement $P(X = x_i) = 0$. Ceci montre que nécessairement, X^p prend la valeur 0 avec une probabilité 1 et toute autre valeur éventuelle de X^p est prise avec une probabilité égale à 0. Mais alors, il en est de même de X et finalement $\mathbb{E}(|X|) = 0$. Maintenant, la variable Y prend un nombre fini de valeurs et est donc bornée. Soit M un majorant de $|Y|$. Alors, par croissance de l'espérance,

$$0 \leqslant \mathbb{E}(|XY|) \leqslant M\mathbb{E}(|X|) = 0$$

puis $\mathbb{E}(|XY|) = 0 = (E(X^p))^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}$.

Dans tous les cas, on a montré que $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant (\mathbb{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}$.

I.C - Espérance conditionnelle

Q7. $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$. Maintenant, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est un système complet d'événements. Donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \times P_{A_i}(X = x)$$

puis, les sommes étant finies,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{i=1}^{m} P(A_i) \times P_{A_i}(X = x) \right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_i}(X = x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \, \mathbb{E}(X|A_i).\end{aligned}$$

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q8. Posons $X^2(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ où $0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. La fonction $t \mapsto tP(|X| \geqslant t)$ est continue par morceaux et positive sur $[0, +\infty[$ car,

- si $t \in \left[0, \sqrt{y_1}\right]$, $P(|X| \geqslant t) = P\left(X^2 \geqslant t^2\right) = P\left(X^2 \geqslant y_1\right) = P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_1}\right) = 1$
- si $t \in \left]\sqrt{y_k}, \sqrt{y_{k+1}}\right]$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $P(|X| \geqslant t) = P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right)$
- si $t \in \left]\sqrt{y_n}, +\infty\right[$, $P(|X| \geqslant t) = 0$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}2\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)\,dt &= 2\int_0^{\sqrt{y_1}} tP\left(|X| \geqslant \sqrt{y_1}\right)\,dt + 2\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\sqrt{y_k}}^{\sqrt{y_{k+1}}} tP\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right)\,dt + 2\int_{y_n}^{+\infty} 0\,dt \\ &= \int_0^{y_1} P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_1}\right)\,du + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right)\,du \text{ (en posant } u = t^2 \text{ dans chaque intégrale)} \\ &= y_1 P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_1}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)\, P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right) \\ &= y_1 P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_1}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} y_{k+1} P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} y_k P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_k}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} y_k P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k \left(P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_k}\right) - P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_{k+1}}\right)\right) + y_n P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y_k P\left(\sqrt{y_k} \leqslant |X| < \sqrt{y_{k+1}}\right) + y_n P\left(|X| \geqslant \sqrt{y_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k P\left(|X| = \sqrt{y_k}\right) + y_n P\left(|X| = \sqrt{y_n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} y_k P\left(|X| = \sqrt{y_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k P\left(X^2 = y_k\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right).\end{aligned}$$

Q9. Par suite, a et b étant strictement positifs,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \leqslant 2a\int_0^{+\infty} te^{-bt^2}\,dt = 2a\left[\frac{e^{-bt^2}}{-2b}\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}.$$

Q10. Soit t un réel. On a $|X + \delta| \leqslant |X| + |\delta|$ et donc si ω est un élément de Ω tel que $|X(\omega) + \delta| \geqslant t$, alors $|X(\omega)| + |\delta| \geqslant t$ puis $|X(\Omega)| \geqslant t - |\delta|$. Ceci montre que $\{\omega \in \Omega / \ |X(\omega) + \delta| \geqslant t\} \subset \{\omega \in \Omega / \ |X(\omega)| \geqslant t - |\delta|\}$ puis que

$$P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|).$$

Q11. Soit t un réel.

$\left(a-\frac{1}{2}bt^2\right)+b(t-|\delta|)^2=\frac{b}{2}t^2-2b|\delta|t+b\delta^2+a=\frac{b}{2}\left(t-2|\delta|\right)^2-2b\delta^2+b\delta^2+a=\frac{b}{2}\left(t-2|\delta|\right)^2+a-b\delta^2\geqslant 0$ car $|\delta|\leqslant\sqrt{\frac{a}{b}}\Rightarrow a-b\delta^2\geqslant 0$.

Par suite, pour tout réel t, $-b(t-|\delta|)^2\leqslant a-\frac{1}{2}bt^2$.

Q12. Soit t un réel tel que $t\geqslant|\delta|$

$$\begin{aligned}P(|X+\delta|\geqslant t)&\leqslant P(|X|\geqslant t-|\delta|)\\&\leqslant a\exp\left(-b\left(t-|\delta|\right)^2\right)\ (\text{car } t-|\delta|\geqslant 0)\\&\leqslant a\exp\left(a-\frac{1}{2}bt^2\right)=a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right).\end{aligned}$$

Q13. Soit $t\in]-|\delta|,|\delta|[$. Alors, $t-|\delta|<0$ puis $P(|X|\geqslant t-|\delta|)=P(|X|\geqslant 0)\leqslant a$ (et donc $1\leqslant a$). D'autre part, $a-\frac{1}{2}bt^2>a-\frac{1}{2}b\delta^2\geqslant a-b\delta^2\geqslant 0$ et donc $\exp\left(a-\frac{1}{2}bt^2\right)\geqslant 1$. Donc,

$$P(|X+\delta|\geqslant t)\leqslant P(|X|\geqslant t-|\delta|)\leqslant a\leqslant a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right).$$

Partie II - L'inégalité de concentration de Talagrand

II.A - Etude de deux cas particuliers

Q14. Si C ne rencontre pas $X(\Omega)$, l'événement $\{X\in C\}$ est vide puis $P(X\in C)=0$. L'inégalité est donc vraie quand C ne rencontre pas $X(\Omega)$.

Q15. Posons $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$ où $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\{-1,1\}^n$. Posons encore $Y=\frac{1}{4}d(X,u)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\varepsilon_i-\alpha_i\right)^2$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, posons encore $Y_i=\frac{1}{4}\left(\varepsilon_i-\alpha_i\right)^2$ (Y_i est une variable aléatoire car ε_i l'est) de sorte que

$$Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i.$$

Chaque Y_i prend les valeurs 0 ou 1 (suivant que $\varepsilon_i\neq\alpha_i$ ou $\varepsilon_i=\alpha_i$) avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Donc, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $Y_i\sim\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Puisque les Y_i sont des variables indépendantes (car les ε_i le sont), on sait que

$$Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right).$$

Q16. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}Y\right)\right)&=\sum_{k=0}^{n}e^{\frac{k}{2}}P\left(\frac{1}{4}d(X,u)^2=k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{e}\right)^k\\&=\left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right)\leqslant\left(\frac{1+3}{2}\right)^n=2^n.$$

Q17. Puisque $u\in C$, $d(X,C)\leqslant\|X-u\|=d(X,u)$ puis $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)\leqslant\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right)\leqslant 2^n$. D'autre part, par indépendance des variables ε_i, $1\leqslant i\leqslant n$,

$$P(X \in C) = P(X = u) = P(\varepsilon_1 = \alpha_1, \dots, \varepsilon_n = \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\varepsilon_i = \alpha_i) = \frac{1}{2^n}$$

et finalement, $P(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \times 2^n = 1$.

II.B - Initialisation

Q18. Si $n = 1$, X prend les deux valeurs e_1 et $-e_1$ avec équiprobabilité. Puisque $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments, on a donc $C \cap X(\Omega) = \{-e_1, e_1\} = X(\Omega)$ ou encore $X(\Omega) \subset C$. Par suite, $P(X \in C) = 1$ et $\frac{1}{d}(X,C)^2(\Omega) = \{0\}$ de sorte que $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 1$. Finalement,

$$P(X \in C) \times \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 1 \leqslant 1.$$

II.C - Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Q19. Soit $x' \in E'$.

- $x' + te_n \in H_t$ puis $x' = \pi(x' + te_n)$. Si de plus $x' + te_n \in C$, alors $x' = \pi(x' + te_n) \in \pi(C \cap H_t) = C_t$.
- Si $x' \in C_t$, il existe $y \in C \cap H_t$ tel que $x' = \pi(y)$. Puisque $y \in H_t$, on peut poser $y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + te_n$ de sorte que $\pi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i = y - te_n$. Mais alors, $x' + te_n = y \in C$.

Q20. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Soient $(x', y') \in (C_\varepsilon)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, d'après la question précédente, $(x' + \varepsilon e_n, y' + \varepsilon e_n) \in C^2$ et donc $(1-\lambda)(x' + \varepsilon e_n) + \lambda(y' + \varepsilon e_n) = (1-\lambda)x' + \lambda y' + \varepsilon e_n \in C$. Mais alors, toujours d'après la question précédente, $(1-\lambda)x' + \lambda y' \in C_\varepsilon$. Ceci montre que C_ε est un convexe de E'.

Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de C_ε. Soit $u = \lim_{p\to+\infty} u_p$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p + \varepsilon e_n$ est dans C. La suite $(u_p + \varepsilon e_n)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $u + \varepsilon e_n$ qui est donc un élément de C, puisque C est fermé. Donc, $u \in C_\varepsilon$.
Ainsi, toute suite convergente d'éléments de C_ε, converge dans C_ε et donc C_ε est un fermé de E'.

En résumé, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, C_ε est un convexe fermé de E'.

Q21. $(\varepsilon_n = 1, \varepsilon_n = -1)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(X \in C) &= P(\varepsilon_n = 1) \times P_{\varepsilon_n=1}(X \in C) + P(\varepsilon_n = -1) \times P_{\varepsilon_n=-1}(X \in C) \\
&= \frac{1}{2}P(X' + e_n \in C) + \frac{1}{2}P(X' - e_n \in C) \\
&= \frac{1}{2}P(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}P(X' \in C_{-1}).
\end{aligned}$$

II.D - Une inégalité cruciale

Q22. Par définition, $Y_{\varepsilon_n} \in C_{\varepsilon_n}$ et donc $Y_\varepsilon + \varepsilon_n e_n \in C$. De même, $Y_{-\varepsilon} - \varepsilon_n e_n \in C$. Puisque C est convexe, le vecteur $w = (1-\lambda)(Y_\varepsilon + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon} - \varepsilon_n e_n)$ est dans C.
Par définition de $d(X, C)$, on en déduit que $d(X,C) \leqslant \|X - w\| = \|(1-\lambda)(Y_\varepsilon + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon} - \varepsilon_n e_n) - X\|$.

Q23.

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)(Y_\varepsilon + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2 &= \|(1-\lambda)(Y_\varepsilon + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon} - \varepsilon_n e_n) - (1-\lambda)(X' + \varepsilon_n e_n) - \lambda(X' + \varepsilon_n e_n)\|^2 \\
&= \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n\|^2.
\end{aligned}$$

Maintenant, $Y_{\varepsilon_n} - X'$ et $Y_{-\varepsilon_n} - X'$ sont dans $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $-2\lambda\varepsilon e_n$ est dans $\text{Vect}(e_n) = E'^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
d(X,C)^2 \leqslant \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n\|^2 &= \|-2\lambda\varepsilon_n e_n\|^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 \\
&= 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2.
\end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 \leqslant (1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2$.

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2 - \|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 &= \lambda(1-\lambda)\left(\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2\right)\\ &= \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

et donc $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|^2 \leqslant (1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}d(X,C)^2 &\leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\|^2\\ &\leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\left\|Y_{\varepsilon_n} - X'\right\|^2 + \lambda\left\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\right\|^2\\ &= 4\lambda^2 + (1-\lambda)d\left(X', C_{\varepsilon_n}\right)^2 + \lambda\left(X', C_{-\varepsilon_n}\right)^2 \text{ (par définition de } Y_{\pm\varepsilon_n}).\end{aligned}$$

II.E - Espérances conditionnelles

Q24. D'après l'hypothèse faite sur X, $C \cap X(\omega)$ contient au moins un vecteur de dernière coordonnée 1 et au moins un vecteur de dernière coordonnée -1 que l'on note $u = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i - e_n = u' - e_n$ où les β_i sont dans $\{-1,1\}$. Le vecteur $u' - e_n$ est dans C et donc le vecteur u' est dans C_{-1} puis

$$p_- \geqslant P(X' = u') > 0.$$

Q25. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\varepsilon_n(\omega) = -1$. D'après la question Q23,

$$\begin{aligned}d(X(\omega, C)^2 &\leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d\left(X'(\omega), C_{\varepsilon_n(\omega)}\right)^2 + \lambda d\left(X'(\omega), C_{-\varepsilon_n(\omega)}\right)^2\\ &= 4\lambda^2 + (1-\lambda)d\left(X'(\omega), C_{-1}\right)^2 + \lambda d\left(X'(\omega), C_{+1}\right)^2\end{aligned}$$

puis $\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X(\omega), C)^2\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\left(\exp\left(\dfrac{1}{8}d\left(X'(\omega), C_{-1}\right)^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\dfrac{1}{8}d\left(X'(\omega), C_{+1}\right)^2\right)\right)^{\lambda}$.

Par croissance de l'espérance conditionnelle, on en déduit que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = -1\right) &\leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{-1}\right)^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{+1}\right)^2\right)\right)^{\lambda}|\varepsilon_n = -1\right)\\ &= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{-1}\right)^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{+1}\right)^2\right)\right)^{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Q26. Soit $\lambda \in]0,1[$. On applique l'inégalité de Hölder avec $p = \dfrac{1}{1-\lambda}$ et $q = \dfrac{1}{\lambda}$ de sorte que p et q sont deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On obtient

$$\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{-1}\right)^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{+1}\right)^2\right)\right)^{\lambda}\right) \leqslant \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{-1}\right)^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{+1}\right)^2\right)\right)\right)^{\lambda}$$

et donc,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{-1}\right)^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X', C_{+1}\right)^2\right)\right)\right)^{\lambda}.$$

Enfin, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'inégalité à établir est l'inégalité de la question Q25. L'inégalité de cette question est donc démontrée pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Q27. En remplaçant dans tout ce qui précède, -1 par $+1$ et $+1$ par -1 (l'inégalité $p_+ \geqslant p_-$ n'ayant pas encore servi), on a aussi pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{-1}\right)^2\right)\right)\right)^{\lambda}.$$

Quand $\lambda=0$ et en multipliant par le réel positif p_+, on obtient en particulier

$$\begin{aligned}p_+\times\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)&\leqslant p_+\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right)\\&=P\left(X'\in C_{+1}\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right).\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question Q20, C_{+1} est un convexe fermé et non vide de E' qui est de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence,

$$p_+\times\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)\leqslant P\left(X'\in C_{+1}\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right)\leqslant 1,$$

et donc, puisque $p_+\geqslant p_->0$,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)\leqslant\frac{1}{p_+}.$$

Q28. Soit $\lambda\in[0,1]$. D'après la formule de l'espérance totale établie à la question Q7,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)&=P\left(\varepsilon_n=1\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)+P\left(\varepsilon_n=-1\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)+\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=-1\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+}+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{-1}\right)^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right)\right)^{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Ensuite, C_{+1} est C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E' qui est de dimension $n-1$ et donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{-1}\right)^2\right)\right)\leqslant\frac{1}{p_-}$ et $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d\left(X',C_{+1}\right)^2\right)\right)\leqslant\frac{1}{p_+}$. On a donc montré que pour tout $\lambda\in[0,1]$,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+}+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right).$$

II.F - Optimisation

Q29. Puisque $p_+\geqslant p_->0$, $\lambda=1-\frac{p_-}{p_+}$ est dans $[0,1[$ puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+}+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)\\&=\frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\frac{p_-}{p_+}\right)^{\lambda-1}\right)\\&=\frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right).\end{aligned}$$

Q30. Pour $x\in[0,1[$, posons $f(x)=\ln(2+x)-\ln(2-x)-(x-1)\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}$. f est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et pour $x\in[0,1[$,

$$f'(x)=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}-\ln(1-x)-1-x$$

puis

$$f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{8x}{(x^2-4)^2} + \frac{x}{1-x} \geqslant 0.$$

f' est donc une fonction croissante sur $[0,1[$. Puisque $f'(0) = 0$, f' est positive sur $[0,1[$ puis f est croissante sur $[0,1[$. Puisque $f(0) = 0$, f est positive sur $[0,1[$ et donc

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x).$$

Q31. Par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit encore que, pour $x \in [0,1[$,

$$e^{\frac{x^2}{2}}(x-1)^{1-x} \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

puis que

$$1 + e^{\frac{x^2}{2}}(x-1)^{1-x} \leqslant 1 + \frac{2+x}{2-x} = \frac{4}{2-x}.$$

Q32. Ainsi, pour $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+} \in [0,1[$,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+} \times \frac{4}{2-\lambda},$$

puis,

$$\begin{aligned}
P(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &= \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\,\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \text{ (d'après Q21)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}(p_+ + p_-)\frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{p_-}{p_+}\right)\frac{4}{2-\lambda}\\
&= \frac{1}{4}(1+1-\lambda)\frac{4}{2-\lambda} = 1.
\end{aligned}$$

L'inégalité est démontrée par récurrence.

II.G - Inégalité de Talagrand

Q33. Soit t un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
P(X \in C) \times P(d(X,C) \geqslant t) &= P(X \in C) \times P\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \geqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right)\\
&\leqslant P(X \in C) \times \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)}{\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)} \text{ (d'après l'inégalité de } \textsc{Markov})\\
&\leqslant \frac{1}{\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)} = \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).
\end{aligned}$$

Partie III - Démonstration du théorème de Johnson-Lindentstrauss

III.A - Une inégalité de concentration

Q34. Si $r < 0$, C est vide et en particulier, C est une partie convexe et fermée de $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Dorénavant, $r \geqslant 0$. Dans ce cas, C contient la matrice nulle et n'est donc pas vide.

• Soient$(M,N) \in C^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\|((1-\lambda)M + \lambda N)u\| = \|(1-\lambda)Mu + \lambda Nu\| \leqslant (1-\lambda)\|Mu\| + \lambda\|Nu\| \leqslant (1-\lambda)r + \lambda r = r.$$

Donc, $(1-\lambda)M + \lambda N \in C$. Ceci montre que C est convexe.

• L'application $h_1\ :\ M \mapsto Mu$ est une application linéaire sur $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et donc h_1 est continue sur $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. D'autre part, l'application $h_2\ :\ v \mapsto \|v\|$ est continue sur $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que $g = h_2 \circ h_1$ est continue sur $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Par suite, $C = g^{-1}([0,r])$ est un fermé de $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par l'application continue g.

Finalement, C est une partie convexe et fermée de $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

Q35. Posons $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant d}$.

$$\begin{aligned}\|Mu\|^2 &= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}u_j\right)^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2\right) \text{ (d'après l'inégalité de }\textsc{Cauchy-Schwarz}\text{)}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2\right) \text{ (car } \|u\| = 1\text{)}\\ &= \mathrm{Tr}\left(M^TM\right) = \|M\|_F^2,\end{aligned}$$

et donc $\|Mu\| \leqslant \|M\|_F$.

Q36. Supposons $d(M,C) < t$. Si $r \geqslant 0$, C est non vide.
Puisque C est un convexe fermé non vide de $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, il existe $N \in C$ telle que $d(M,C) = \|M-N\|_F$ d'après la question Q4. D'après la question précédente,

$$\|Mu\| - \|Nu\| \leqslant \|(M-N)u\| \leqslant \|M-N\|_F = d(M,C) < t$$

puis

$$g(M) = \|Mu\| \leqslant \|Nu\| + t \leqslant r + t \text{ (car } N \in C\text{)}.$$

Si $r < 0$, C est vide et $d(X,C)$ n'est pas défini.

Q37. Soit $r \geqslant 0$. D'après la question précédente, l'événement $\{d(X,C) < t\}$ est contenu dans l'événement $\{g(X) < r+t\}$. Par passage au complémentaire, on obtient $\{g(X) \geqslant r+t\} \subset \{d(X,C) \geqslant t\}$ puis, d'après la question Q33,

$$\begin{aligned}P(g(X) \leqslant r)P(g(X) \geqslant r+t) &= P(X \in C)P(g(X) \geqslant r+t)\\ &\leqslant P(X \in C)P(d(X,C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).\end{aligned}$$

Si $r < 0$, $P(g(X) \leqslant r) = 0$ et l'inégalité est immédiate.

III.B - Médianes

Q38. X prend un nombre fini de valeurs dans $\mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ puis $g(X)$ prend un nombre fini de valeurs positives : $0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_p$.

La fonction $G\ :\ t \mapsto P(g(X) \leqslant t)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (car si $t \leqslant t'$, alors $\{g(X) \leqslant t\} \subset \{g(X) \leqslant t'\}$). $G(y_p) = P(g(X) \leqslant y_p) = 1$. On peut poser $i = \mathrm{Min}\left\{j \in [\![1,p]\!]/\ G(y_j) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ puis on pose $m = y_i$.

Par construction, $P(g(X) \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$. Si $i \geqslant 2$, par construction $P(g(X) \leqslant y_{i-1}) < \frac{1}{2}$ puis

$$P(g(X) \geqslant m) = P(g(X) \geqslant y_i) = 1 - P(g(X) < y_i) = 1 - P(g(X) \leqslant y_{i-1}) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si $i = 1$, $P(g(X) = y_1) = P(g(X) \leqslant y_1) \geqslant \frac{1}{2}$ et donc $P(g(X) \geqslant y_1) \geqslant P(g(X) = y_1) \geqslant \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, $m = y_i$ convient.

Q39. Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}
P(|g(X)-m|\geqslant t) &= P((g(X)\geqslant m+t)\cup(g(X)\leqslant m-t))\\
&\leqslant P(g(X)\geqslant m+t)+P(g(X)\leqslant m-t) = 2\times\left(\frac{1}{2}P(g(X)\geqslant m+t)+\frac{1}{2}P(g(X)\leqslant m-t)\right)\\
&\leqslant 2\left(P(g(x)\leqslant m)P(g(X)\geqslant m+t)+P(g(X)\leqslant m-t)P(g(X)\geqslant m)\right)\\
&\leqslant 2\left(\exp\left(-\frac{1}{8}((m+t)-m)^2\right)+\exp\left(-\frac{1}{8}(m-(m-t))^2\right)\right) \text{ (d'après Q37)}\\
&= 4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).
\end{aligned}$$

Q40. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((g(X)-m)^2\right) &= 2\int_0^{+\infty} tP(|g(X)-m|\geqslant t)\ dt \text{ (d'après la question Q8)}\\
&\leqslant 8\int_0^{+\infty} t\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)\ dt = 8\left[-4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right)\right]_0^{+\infty}\\
&= 32.
\end{aligned}$$

Q41. $(g(X))^2=\|Xu\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(Xu)_i^2$ (où pour $i\in[\![1,k]\!]$, $(Xu)_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j$). Par linéarité de l'espérance,

$$E\left((g(X))^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left((Xu)_i^2\right).$$

Ensuite, pour $1\leqslant i\leqslant k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((Xu)_i^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j\right)^2\right)\\
&= \sum_{j=1}^{d}u_j^2\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}^2\right)+2\sum_{1\leqslant j<j'\leqslant d}u_ju_{j'}\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,j'}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, $\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}^2\right)=\mathbb{E}(1)=1$ puis pour $j\neq j'$, les variables $\varepsilon_{i,j}$ et $\varepsilon_{i,j'}$ étant indépendantes,

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,j'}\right)=\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j'}\right)=\left(1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Il reste $\mathbb{E}\left((Xu)_i^2\right)=\displaystyle\sum_{j=1}^{d}u_j^2=\|u\|^2=1$ puis

$$E\left((g(X))^2\right)=\sum_{i=1}^{k}1=k.$$

On a montré que $\mathbb{E}\left((g(X))^2\right)=k$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\mathbb{E}(g(X)))^2=(\mathbb{E}(g(X)\times 1))^2\leqslant\mathbb{E}\left((g(X))^2\right)\mathbb{E}\left(1^2\right)=k$ et donc, puisque $g(X)$ est une variable positive, $0\leqslant\mathbb{E}(g(X))\leqslant\sqrt{k}$.

Q42. On en déduit que

$$\mathbb{E}\left((g(X)-m)^2\right)=E\left((g(X))^2\right)-2m\mathbb{E}(g(X))+m^2=k-2m\mathbb{E}(g(X))+m^2\geqslant k-2m\sqrt{k}+m^2=\left(\sqrt{k}-m\right)^2.$$

III.C - Un lemme clé

Q43. D'après la question Q39, la variable aléatoire $Y=g(X)-m$ vérifie l'inégalité de la question Q4 avec $a=4$ et $b=\dfrac{1}{8}$.

D'après les questions Q12 et Q13, si $0\leqslant|\delta|\leqslant\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{32}$, alors pour $t\geqslant 0$,

$$P(|g(X)-m+\delta|\geqslant t)=P(|Y+\delta|\geqslant t)\leqslant 4e^4\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)\quad (*).$$

D'après les questions Q40 et Q42, $\left(\sqrt{k}-m\right)^2\leqslant \mathbb{E}\left((g(X)-m)^2\right)\leqslant 32$ puis $\left|\sqrt{k}-m\right|\leqslant\sqrt{32}$. On peut donc appliquer $(*)$ avec $\delta=m-\sqrt{k}$ et on obtient pour $t\geqslant 0$,

$$P\left(\left|g(X)-\sqrt{k}\right|\geqslant t\right)\leqslant 4e^4\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right).$$

Q44. $|\|A_k u\|-1|>\varepsilon\Leftrightarrow\left|\left\|\frac{X}{\sqrt{k}}u\right\|-1\right|>\varepsilon\Leftrightarrow\left|\|Xu\|-\sqrt{k}\right|>\varepsilon\sqrt{k}\Leftrightarrow\left|g(X)-\sqrt{k}\right|>\varepsilon\sqrt{k}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}P\left(|\|A_k u\|-1|>\varepsilon\right)&\leqslant 4e^4\exp\left(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2\right)\leqslant 4e^4\exp\left(-\frac{1}{16}160\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)=4e^4\delta^{10}\\&<4e^4\left(\frac{1}{2}\right)^9\delta=\frac{e^4}{2^7}\delta<\frac{3^4}{2^7}\delta=\frac{81}{128}\delta\\&<\delta.\end{aligned}$$

III.D - Conclusion

Q45. En posant $u=\dfrac{1}{\|v_i-v_j\|}(v_i-v_j)$,

$$(1-\varepsilon)\|v_i-v_j\|\leqslant\|A_kv_i-A_kv_j\|\leqslant(1+\varepsilon)\|v_i-v_j\|\Leftrightarrow 1-\varepsilon\leqslant\|A_ku\|\leqslant 1+\varepsilon\Leftrightarrow|\|A_ku\|-1|\leqslant\varepsilon.$$

Donc, $\overline{E_{i,j}}$ est l'événement $\{|\|A_ku\|-1|>\varepsilon\}$. D'après la question 44, $P\left(\overline{E_{i,j}}\right)<\delta$.

Q46.

$$\begin{aligned}1-P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\right)&=P\left(\overline{\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}}\right)=P\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N}\overline{E_{i,j}}\right)\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}^{P}\left(\overline{E_{i,j}}\right)\\&<\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\delta=\delta\sum_{j=2}^{N}\left(\sum_{i=1}^{j-1}1\right)=\delta\sum_{j=2}^{N}(j-1)\\&=\frac{N(N-1)}{2}\delta.\end{aligned}$$

et donc $P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\right)>1-\dfrac{N(N-1)}{2}\delta$.

Q47. On prend δ de la forme $\dfrac{1}{N^\alpha}$ avec $\alpha\geqslant 2$. On a bien $0<\delta\leqslant\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{1}{2}$. La condition $k\geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$ s'écrit encore $k\geqslant c\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ où $c=160\alpha$ est une constante strictement positive indépendante de N, d, k et ε.

Toute réalisation de l'événement $\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant n}E_{i,j}$ fournit une application linéaire A_k de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^d$ qui est une ε-isométrie. La probabilité de cet événement vérifie

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\right)>1-\frac{N(N-1)}{2N^\alpha}.$$

En choisissant $\alpha=2$, on voit que sous la condition $k\geqslant c\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$, on a plus d'une chance sur deux qu'il existe une ε-isométrie de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^d$. En choisissant $\alpha=100$, on voit que l'existence d'une telle ε-isométrie est quasiment certaine.

