SESSION 2012

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE PSI

I Généralités

I.A **-** Soit λ une valeur propre réelle de A. Il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Soit $X_0 = \dfrac{1}{\|X\|}X$. Alors $\|X_0\| = 1$ puis

$$ {}^tX_0AX_0 = \frac{1}{\|X\|^2}{}^tXAX = \frac{1}{\|X\|^2}{}^tX(\lambda X) = \lambda\frac{{}^tXX}{\|X\|^2} = \lambda. $$

On a montré que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A),\ \lambda \in R(A).}$$

I.B **-**

I.B.1) On note $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $\|e_i\| = 1$ puis (δ étant le symbole de Kronecker)

$$ {}^te_iAe_i = \sum_{1\leqslant j,k} a_{j,k}\delta_{i,j}\delta_{i,k} = a_{i,i}. $$

On a montré que

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} \in R(A).}$$

I.B.2) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| = 1$.

$$ {}^tXAX = a_{1,1}x^2 + a_{1,2}xy + a_{2,1}yx + a_{2,2}y^2 = xy - xy = 0. $$

Mais alors, pour tout X tel que $\|X\| = 1$, ${}^tXAX \neq a_{1,2}$ et donc $a_{1,2} \notin R(A)$. Par suite, les $a_{i,j}$, $i \neq j$, ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C **-**

I.C.1) Si la famille (X_1, X_2) est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X_2 = \lambda X_1$. Puisque X_1 et X_2 sont unitaires, $\lambda \in \{-1, 1\}$ et donc $X_2 = X_1$ ou $X_2 = -X_1$. Dans les deux cas, on obtient ${}^tX_2AX_2 = {}^tX_1AX_1$ ce qui n'est pas. Donc la famille (X_1, X_2) est libre.

I.C.2) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\| \ \|$.

• La fonction $f\ :\ \lambda \mapsto \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ est continue sur $[0, 1]$ car ses composantes le sont en tant que fonctions affines.
• L'application $g\ :\ X \mapsto (X, X)$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ car g est linéaire et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie. L'application $h\ :\ (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est continue sur $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ car h est bilinéaire et $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ est de dimension finie. Donc l'application $h \circ g\ :\ X \mapsto {}^tXAX$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Enfin, l'application $h \circ g \circ f\ :\ \lambda \mapsto {}^tX_\lambda AX_\lambda$ est continue sur $[0, 1]$.
• On sait que l'application $X \mapsto \|X\|$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car 1-lipschitzienne et donc l'application $\lambda \mapsto \|X_\lambda\|^2$ est continue sur $[0, 1]$.
• Comme la famille (X_1, X_2) est libre, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 - \lambda = 0$ ce qui est impossible. Donc, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $X_\lambda \neq 0$ puis $\|X_\lambda\|^2 \neq 0$.
• Finalement, ϕ est continue sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

I.C.3) Soit $c \in [a,b]$. Puisque $\phi(0) = b$, $\phi(1) = a$ et que ϕ est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que $\phi(\lambda_0) = c$. Soit $X = \dfrac{1}{\|X_{\lambda_0}\|}X_{\lambda_0}$. X est un vecteur unitaire tel que ${}^tXAX = c$ et donc $c \in R(A)$. Finalement, $[a,b] \subset R(A)$.

Par suite, $R(A)$ est un convexe de R et donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

***I.D* -** Les nombres $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans $R(A)$.
D'après la question précédente, tout nombre de $[\text{Min}\{a_{i,i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \text{Max}\{a_{i,i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}]$ appartient à $R(A)$. En particulier, la moyenne arithmétique des $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, à savoir $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \dfrac{\text{Tr}(A)}{n} = 0$ appartient à $R(A)$.

***I.E* -** Soit $a \in R({}^tQAQ)$. Il existe un vecteur unitaire X tel que ${}^tX{}^tQAQX = a$. Soit $X' = QX$. Alors ${}^tX'AX' = a$ et d'autre part, $\|X'\| = \sqrt{{}^tX{}^tQQX} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\| = 1$ (car Q est orthogonale). Donc $a \in R(A)$. Ceci montre que $R({}^tQAQ) \subset R(A)$. En appliquant ce résultat à la matrice $A' = {}^tQAQ$ et à la matrice orthogonale $Q' = {}^tQ$, on a aussi $R(A) \subset R({}^tQAQ)$ et finalement $R(A) = R({}^tQAQ)$.

***I.F* -**

I.F.1) Supposons (C_2). Alors $a_{1,1} = \text{Tr}(A) \in R(A)$ d'après la question I.B.1. On a montré que (C_2) implique (C_1).

I.F.2) Soit $x \in R(A)$. Il existe un vecteur unitaire X_1 tel que ${}^tX_1AX_1 = x$. Le vecteur X_1 est unitaire ou encore la famille (X_1) est orthonormée. On peut la compléter en $(X_1, \ldots, X_n)$ base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
Soit Q_1 la matrice dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_n$. La matrice Q_1 est orthogonale car matrice d'une base orthonormée dans une autre (la base canonique). Le coefficient ligne 1, colonne 1, de ${}^tQ_1AQ_1$ est ${}^tX_1AX_1 = x$. La matrice ${}^tQ_1AQ_1$ a la forme désirée.

I.F.3) Supposons A symétrique. Alors ${}^tQ_1AQ_1$ est symétrique ce qui fournit

$$\begin{pmatrix} x & {}^tC \\ {}^tL & {}^tB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix},$$

et en particulier ${}^tB = B$. Donc B est symétrique.

I.F.4) Puisque Q_1 est orthogonale, ${}^tQ_1AQ_1 = Q_1^{-1}AQ_1$. Par suite, les matrices A_1 et ${}^tQ_1AQ_1$ sont semblables. On sait alors que ces matrices ont même trace et donc $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

I.F.5) Supposons A symétrique. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que (C_1) implique (C_2).

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$ en prenant $Q_1 = I_1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour toute matrice symétrique A de format, (C_1) implique (C_2).

Soit A une matrice symétrique réelle de format $n+1$ telle que $\text{Tr}(A) \in R(A)$. D'après la question I.F.2, il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que ${}^tQ_1AQ_1$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$. D'après la question I.F.3), la matrice B est symétrique. D'après la question I.F.4),

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tQ_1AQ_1) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B),$$

et donc $\text{Tr}(B) = 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice Q_2 orthogonale de format n telle ${}^tQ_2BQ_2$ ait une diagonale nulle. Soit $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ puis $Q = Q_1Q_3$. Q_3 est une matrice orthogonale de format $n+1$ car ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales et donc Q est une matrice orthogonale en tant que produit de deux matrices orthogonales. De plus, un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} {}^tQAQ = {}^tQ_3{}^tQ_1AQ_1Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & LQ_2 \\ C & BQ_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & LQ_2 \\ {}^tQ_2C & {}^tQ_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L' \\ C' & {}^tQ_2BQ_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme la matrice ${}^tQ_2BQ_2$ a une diagonale nulle, la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ est de la forme $(\text{Tr}(A), 0, \ldots, 0)$. Le résultat est démontré par récurrence.

II - Matrices symétriques de format $(2,2)$

II.A **-** Soient X_1 et X_2 des vecteurs propres unitaires associés respectivement à λ_1 et λ_2. Pour $i \in \{1,2\}$, ${}^tX_iAX_i = \lambda_i{}^tX_iX_i = \lambda_i$ et donc $\{\lambda_1,\lambda_2\} \subset R(A)$. D'après la question I.C, on en déduit que $[\lambda_1,\lambda_2] \subset R(A)$.

Montrons que $R(A) \subset [\lambda_1,\lambda_2]$. La matrice A est symétrique réelle et donc d'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QD{}^tQ$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$. D'après la question I.E, $R(A) = R({}^tQAQ) = R(D)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $x^2+y^2 = 1$.

$${}^tXDX = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} = \lambda_1x^2+\lambda_2y^2.$$

Pat suite, ${}^tXDX \geqslant \lambda_1(x^2+y^2) = \lambda_1$ et ${}^tXDX \leqslant \lambda_2(x^2+y^2) = \lambda_2$. Ceci montre que $R(A) = R(D) \subset [\lambda_1,\lambda_2]$ et finalement que

$$\boxed{R(A) = [\lambda_1,\lambda_2].}$$

II.B **-**

II.B.1) On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis (e_1,e_2) une base orthonormée de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres (λ_1,λ_2). On note Q la matrice de passage de la base (i,j) à la base (e_1,e_2). Q est une matrice orthogonale car matrice d'une base orthonormée dans une autre. On pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$. Enfin, pour $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $X' = {}^tQX = (x'y')$.

$$\langle AX,X\rangle = 1 \Leftrightarrow {}^tXAX = 1 \Leftrightarrow {}^tXQD{}^tQX = 1 \Leftrightarrow {}^tX'DX' = 1 \Leftrightarrow \lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2 = 1.$$

Ainsi, une équation de Γ dans le repère orthonormé (O,e_1,e_2) est $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2 = 1$.

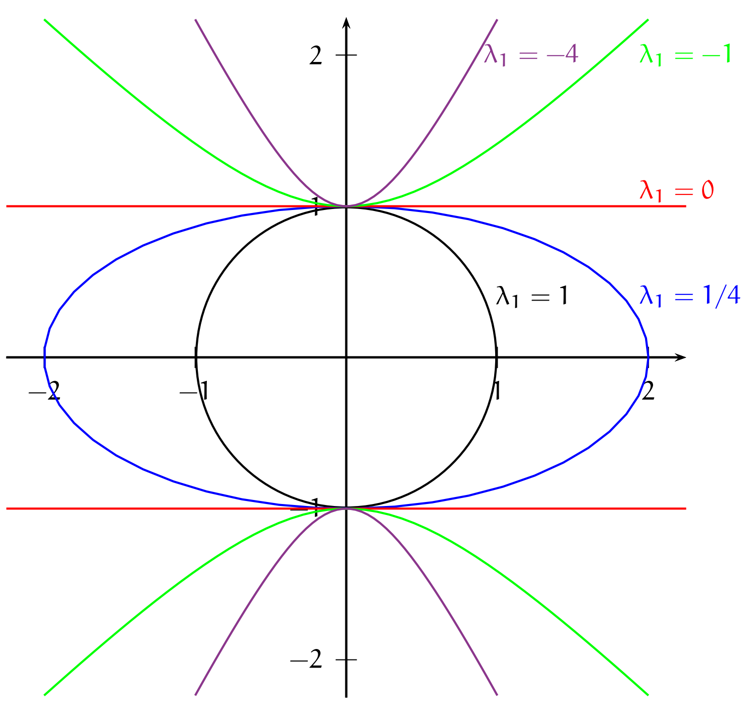
Si $\lambda_1 \leqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$, Γ est vide.

Si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$, Γ est la réunion des droites d'équations respectives $x' = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $x' = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$. De même, si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$, Γ est la réunion de deux droites.

Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, Γ est l'hyperbole d'équation $\dfrac{x'^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} - \dfrac{y'^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\right)^2} = 1$. De même, si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, Γ est une hyperbole.

Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, Γ est l'ellipse d'équation $\dfrac{x'^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \dfrac{y'^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$.

II.B.2) Figure.



***II.C* -** D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPBP = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2) = D'$. On pose $A' = {}^tPAP$. Deux matrices semblables ont même trace et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}\left(P^{-1}APP^{-1}BP\right) = \mathrm{Tr}(A'D') = a'_{1,1}\mu_1 + a'_{2,2}\mu_2 = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + (a'_{1,1} - \lambda_1)\mu_1 + (a'_{2,2} - \lambda_2)\mu_2 \\ &= \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + (a'_{1,1} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) \text{ (car } \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{1,1} + a'_{2,2} \text{ et donc } a'_{1,1} - \lambda_1 = \lambda_2 - a'_{2,2})\end{aligned}$$

D'après les questions I.E et II.A, $R(A') = R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ et d'après la question I.B.1, $a'_{1,1} \in R(A')$. Donc $a'_{1,1} - \lambda \geqslant 0$. D'autre part, $\mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$ et donc $(a'_{1,1} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) \leqslant 0$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + (a'_{1,1} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2.$$

***II.D* -**

II.D.1) $A \geqslant 0$ et donc $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$ puis $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$.

II.D.2) On prend les notations de la question II.A. Soient $X \in \mathbb{R}^2$ puis $X' = {}^tQX = (x', y')$.

$${}^tXAX = {}^tXQD{}^tQX = {}^tX'DX' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \geqslant 0.$$

Par suite, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, ${}^tXAX \geqslant 0$.

II.D.3) Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2$.
Pour $X = (1, 0)$, on obtient $a = {}^tXAX \geqslant 0$ et pour $X = (0, 1)$, on obtient $d = {}^tXAX \geqslant 0$.

II.D.4) • Si $S \geqslant 0$, alors $\det(S) \geqslant 0$ d'après la question II.D.1 et $\mathrm{Tr}(S) = a + d \geqslant 0$ d'après la question II.D.3.

• Notons α_1 et α_2 les deux valeurs propres réelles de S. Supposons que $\mathrm{Tr}(S) \geqslant 0$ et $\det(S) \geqslant 0$. Alors, $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 0$ (I) et $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$ (II).
D'après la condition (II), ou bien un des deux nombres α_1 ou α_2 est nul et dans ce cas, l'autre est positif d'après la condition (I), ou bien les deux nombres α_1 et α_2 sont non nuls et de même signe puis $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ d'après la condition (I). Ainsi, les deux valeurs propres de S sont positives et donc $S \geqslant 0$.

On a montré que $S \geqslant 0$ si et seulement si ($\mathrm{Tr}(S) \geqslant 0$ et $\det(S) \geqslant 0$).

***II.E* -**

II.E.1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u_1 = \left(b_1, \sqrt{\det A}\right)$ et $u_2 = \left(b_2, \sqrt{\det B}\right)$,

$$b_1b_2 + \sqrt{\det A \det B} \leqslant\leqslant \sqrt{\left(b_1^2 + \det A\right)\left(b_2^2 + \det B\right)} = \sqrt{(a_1d_1)(a_2d_2)},$$

et donc $b_1b_2 \leqslant \sqrt{(a_1d_1)(a_2d_2)} - \sqrt{\det A \det B}$.

II.E.2) On en déduit que

$$\begin{aligned}\det(A+B) - \det(A) - \det(B) &= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)^2 - (a_1d_1 - b_1^2) - (a_2d_2 - b_2^2) \\ &= a_1d_2 + a_2d_1 - 2b_1b_2 \\ &\geqslant 2\sqrt{\det(A)\det(B)} + \left(a_1d_2 + a_2d_1 - 2\sqrt{a_1a_2d_1d_2}\right) \\ &= 2\sqrt{\det(A)\det(B)} + \left(\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1}\right)^2 \text{ (d'après II.D.3, } a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ d_1 \geqslant 0 \text{ et } d_2 \geqslant 0) \\ &\geqslant 2\sqrt{\det(A)\det(B)},\end{aligned}$$

et donc $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$.

***II.F* -**

II.F.1) Puisque $b_1b_2 \neq 0$, les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas nuls. On sait alors que l'inégalité de la question II.E.1 est une égalité si et seulement si $u_1.u_2 \geqslant 0$ et (u_1, u_2) liée. Ces conditions étant réalisées, l'inégalité de II.E.2 est une égalité si et seulement si $\left(\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1}\right)^2 = 0$ ou encore $a_1d_2 = a_2d_1$ ou encore $a_1d_2 - a_2d_1 = 0$ ou enfin $((a_1, d_1), (a_2, d_2))$ liée.
Notons alors que $\sqrt{\det(A)\det(B)} = \sqrt{(b_1^2 - a_1d_1)(b_2^2 - a_2d_2)} \geqslant \sqrt{b_1^2b_2^2}$ car $a_1d_1 \geqslant 0$ et $a_2d_2 \geqslant 0$. Puis $\sqrt{\det(A)\det(B)} \geqslant |b_1b_2| \geqslant -b_1b_2$ et donc $u_1.u_2 = b_1b_2 + \sqrt{\det(A)\det(B)} \geqslant 0$ dans tous les cas.

Finalement, l'inégalité de II.E.2 est une égalité si et seulement si $((a_1, d_1), (a_2, d_2))$ liée et $\left((b_1, \sqrt{\det(A)}), (b_2, \sqrt{\det(B)})\right)$ liée.

II.F.2) Tout d'abord, puisque $B \geqslant 0$, on a $\det(B) \geqslant 0$ d'après la question II.D.I puis $a_2 d_2 \geqslant b_2^2 > 0$ (car $b_2 \neq 0$). En particulier, le vecteur (a_2, d_2) n'est pas nul. Par suite, la famille $((a_1, d_1), (a_2, d_2))$ est liée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1, d_1) = \lambda(a_2, d_2)$ ou encore tel que $a_1 = \lambda a_2$ et $d_1 = \lambda d_2$.
De plus, on a $a_2 \geqslant 0$ et $d_2 \geqslant 0$ d'après la question II.D.3 et $a_2 d_2 > 0$. On en déduit que $a_2 > 0$ et $d_2 > 0$ et de même $a_1 > 0$ et $d_1 > 0$. Par suite, la famille $((a_1, d_1), (a_2, d_2))$ est liée si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $(a_1, d_1) = \lambda(a_2, d_2)$ ou encore tel que $a_1 = \lambda a_2$ et $d_1 = \lambda d_2$.

Cette condition est dorénavant réalisée. Si la famille (u_1, u_2) est liée, il existe un réel μ tel que $\left(b_1, \sqrt{\det(A)}\right) = \mu \left(b_2, \sqrt{\det(B)}\right)$ ce qui fournit $b_1 = \mu b_2$ et $a_1 d_1 - b_1^2 = \mu^2(a_2 d_2 - b_2^2)$ ou encore $\lambda^2 a_2 d_2 - \mu^2 b_2^2 = \mu^2(a_2 d_2 - b_2^2)$ ou enfin $\lambda^2 = \mu^2$ car $a_2 d_2 \neq 0$. De plus, l'égalité $\mu = \dfrac{\sqrt{\det(A)}}{\sqrt{\det(B)}}$ fournit $\mu > 0$ et donc $\lambda = \mu$.

On a montré que si l'inégalité de la question II.E.2 est une égalité, il existe $\lambda > 0$ tel que $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ et $d_1 = \lambda d_2$ ou encore tel que $A = \lambda B$.

Réciproquement, si il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)} &= \lambda^2 \det(B) + \det(B) + 2\sqrt{\lambda^2 \det(B)\det(B)} \\
&= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)\det(B) \text{ (car} \lambda \geqslant 0 \text{ et } \det(B) \geqslant 0) \\
&= (1 + \lambda)^2 \det(B) = \det\left((\lambda + 1)B\right) = \det(A + B).
\end{aligned}$$

On a montré que l'inégalité de la question II.E.2 est une égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$.

II.G **-** Soit S une matrice symétrique de format 2. Soient λ_1 et λ_2 ses deux valeurs propres réelles. D'après la question II.D.2), si $S \geqslant 0$, alors pour tout vecteur X, ${}^t X S X \geqslant 0$. Réciproquement, si pour tout vecteur X, ${}^t X S X \geqslant 0$, alors en particulier pour X_i vecteur unitaire associé à λ_i, $i \in \{1, 2\}$, on obtient $\lambda_i = {}^t X_i S X_i \geqslant 0$. En résumé, $S \geqslant 0$ si et seulement si pour tout vecteur X, ${}^t X S X \geqslant 0$.

Vérifions alors que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

Réflexivité. Soit $S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. $S - S = 0 \geqslant 0$ et donc $S \leqslant S$.

Anti-symétrie. Soit $(S, S') \in (\mathscr{S}_2(\mathbb{R}))^2$ tel que $S \leqslant S'$ et $S' \leqslant S$. Alors, pour tout vecteur X, ${}^t X(S' - S)X \geqslant 0$ et ${}^t X(S' - S)X \leqslant 0$ puis ${}^t X(S' - S)X = 0$. En appliquant ce résultat successivement aux vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ puis $(1, 1)$, on obtient la nullité des quatre coefficients de la matrice symétrique $S' - S$ et donc $S = S'$.

Transitivité. Soit $(S, S', S'') \in (\mathscr{S}_2(\mathbb{R}))^3$ tel que $S \leqslant S'$ et $S' \leqslant S''$. Alors, pour tout vecteur X, ${}^t X(S'' - S)X = {}^t X(S'' - S')X + {}^t X(S' - S)X \geqslant 0$ et donc $S \leqslant S''$.

On a montré que $\leqslant$ est réflexive, anti-symétrique et transitive et donc que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

II.H -

II.H.1) Soit X un vecteur. Pour tout entier naturel n, $A_n \leqslant A_{n+1}$ puis $A_{n+1} - A_n \geqslant 0$ puis ${}^t X(A_{n+1} - A_n)X \geqslant 0$ et donc ${}^t X A_n X \leqslant {}^t X A_{n+1} X$. On a montré que pour tout vecteur X, la suite $({}^t X A_n X)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ un majorant de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit X un vecteur. Pour tout entier naturel n, $A_n \leqslant A$ puis $A - A_n \geqslant 0$ puis ${}^t X(A - A_n)X \geqslant 0$ et donc ${}^t X A_n X \leqslant {}^t X A X$. On a montré que pour tout vecteur X, la suite $({}^t X A_n X)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

II.H.2) On applique les résultats précédents aux deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et on obtient : les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes et majorées.

II.H.3) Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc convergentes. De même, si $X = (1, 1)$, la suite $({}^t X A X)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n + 2b_n + d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée et donc converge. Mais alors la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \dfrac{1}{2}\left((a_n + 2b_n + d_n)_{n \in \mathbb{N}} - (a_n)_{n \in \mathbb{N}} - (d_n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ converge.

En résumé, les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et donc la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

III - Matrices symétriques définies positives

III.A **-** D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que $A = PD{}^t P$. Puisque A est définie positive, les λ_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, sont des réels strictement positifs. Posons alors $Y = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_p}\right)_{1 \leqslant p \leqslant n} {}^t P$. Y est inversible car produit de deux matrices inversibles puis

$${}^t Y Y = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_p}\right)_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_p}\right)_{1 \leqslant p \leqslant n} {}^t P = PD{}^t P = A.$$

On a montré qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = {}^tYY$.

III.B **-** La matrice ${}^tY^{-1}BY^{-1}$ est symétrique réelle car ${}^t({}^tY^{-1}BY^{-1}) = {}^tY^{-1}{}^tBY^{-1} = {}^tY^{-1}BY^{-1}$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que ${}^tP{}^tY^{-1}BY^{-1}P = D$. Soir $T = Y^{-1}P$. T est une matrice inversible car produit de deux matrices inversibles et vérifie ${}^tTBT = D$. D'autre part,

$$ {}^tTAT = {}^tP{}^tY^{-1}{}^tYYY^{-1}P = {}^tPP = I_n. $$

Le résultat est démontré.

III.C **-**

III.C.1) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de B. Les λ_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, sont des réels strictement positifs. On sait que les valeurs propres de $I_n + B$ sont les $1 + \lambda_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$, et donc

$$ \det(I_n + B) = \prod_{p=1}^{n}(1 + \lambda_p) = 1 + \prod_{p=1}^{n}\lambda_p + \ldots \geqslant 1 + \prod_{p=1}^{n}\lambda_p = 1 + \det B. $$

On a montré que $\det(I_n + B) \geqslant 1 + \det B$.

III.C.2) On reprend les notations de la question III.B. La matrice D est une matrice symétrique. Vérifions que D est définie positive. Tout d'abord, B est positive et donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à coefficients positifs telles que $B = P\Delta P^{-1}$. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur puis $X' = {}^tPX = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$ {}^tXBX = {}^tXP\Delta{}^tPX = {}^tX'\Delta X' = \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i'^2 \geqslant 0. $$

Soit alors λ une valeur propre de D. Il existe un vecteur X non nul tel que $DX = \lambda X$ puis

$$ \lambda{}^tXX = {}^tXDX = {}^tX{}^tTBTX = {}^t(TX)B(TX) $$

et donc, puisque ${}^tXX = \langle X, X\rangle > 0$, $\lambda = \dfrac{{}^t(TX)B(TX)}{{}^tXX} \geqslant 0$. Enfin, D est inversible car produit de matrices inversibles et donc $\lambda > 0$. On a montré que toute valeur propre de D est strictement positive ou encore que D est définie positive.

D'après la question précédente, puisque D est définie positive, $\det(I_n + D) \geqslant 1 + \det(D)$ puis

$$ \begin{aligned} \det(A + B) &= \det\left({}^tT^{-1}T^{-1} + {}^tT^{-1}DT^{-1}\right) = \det\left({}^tT^{-1}\right)\det\left(I_n + D\right)\det\left(T^{-1}\right) \\ &\geqslant \det\left({}^tT^{-1}\right)(1 + \det(D))\det\left(T^{-1}\right)\ \left(\text{car } \det\left({}^tT^{-1}\right)\det\left(T^{-1}\right) = \det(A) > 0\right) \\ &= \det\left({}^tT^{-1}\right)\left(T^{-1}\right) + \det\left({}^tT^{-1}\right)\det(D)\left(T^{-1}\right) = \det\left({}^tT^{-1}T^{-1}\right) + \det\left({}^tT^{-1}DT^{-1}\right) = \det(A) + \det(B). \end{aligned} $$

On a montré que $\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

III.D **-** Soit $\beta \in]0, 1[$. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \beta x + 1 - \beta - x^\beta$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \beta(1 - x^{\beta-1})$. La fonction f' est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$ (car $0 < \beta < 1$). Par suite, la fonction f admet un minimum en 1. Comme $f(1) = \beta + 1 - \beta - 1 = 0$, pour tout $x > 0$, on a $f(x) \geqslant 0$ puis $x^\beta \leqslant \beta x + 1 - \beta$.

III.E **-** On reprend les notations de la question III.B. Montrons tout d'abord le résultat pour les matrices I_n et $D = \mathrm{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Puisque les μ_i sont strictement positifs,

$$ \det(\alpha I_n + \beta D) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\mu_i) = \prod_{i=1}^{n}(\beta\mu_i + 1 - \beta) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\mu_i^\beta = 1 \times \left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)^\beta = (\det D)^\beta. $$

On en déduit que

$$ \begin{aligned} \det(\alpha A + \beta B) &= \det(\alpha{}^tT^{-1}T^{-1} + \beta{}^tT^{-1}DT^{-1}) = \det({}^tT^{-1})\det(\alpha I_n + \beta D)\det(T^{-1}) \\ &\geqslant \det({}^tT^{-1})\,(\det D)^\beta\det(T^{-1})\ \left(\text{car } \det\left({}^tT^{-1}\right)\det\left(T^{-1}\right) = \det(A) > 0\right) \\ &= \left(\det({}^tT^{-1})\det(T^{-1})\right)^\alpha\left(\det({}^tT^{-1})\det D\det(T^{-1})\right)^\beta\ (\text{car } \alpha + \beta = 1) \\ &= (\det(A))^\alpha\,(\det(B))^\beta. \end{aligned} $$

On a montré que pour toutes matrices A et B symétriques définies positives, $\det(\alpha A+\beta B)\geqslant(\det(A))^{\alpha}(\det(B))^{\beta}$.

III.F **-** Montrons le résultat par récurrence sur k.

• Le résultat est vrai pour $k=2$ d'après la question précédente.
• Soit $k\geqslant 2$. Supposons le résultat pour k matrices. Soient A_1, A_2, ..., A_{k+1} $k+1$ matrices symétriques définies positives et α_1, α_2, ..., α_{k+1} $k+1$ réels strictement positifs tels que $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}=1$. Alors $1-\alpha_{k+1}\in]0,1[$ et on peut poser $B=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}A_i$. La matrice B est une matrice symétrique en tant que combinaison linéaire de matrices symétriques. Vérifions que B est définie positive. Pour cela, vérifions une bonne fois pour toutes qu'une matrice symétrique S est définie positive si et seulement pour tout vecteur non nul X, ${}^tXSX>0$.

Supposons que pour tout vecteur non nul X, ${}^tXSX>0$. Soit λ une valeur propre de S puis X un vecteur propre unitaire associé. Alors $\lambda=\lambda{}^tXX={}^tXSX>0$. Ainsi, toute valeur propre de S est strictement positive et donc S est définie positive. Supposons que S soit définie positive. D'après la question III.A, il existe une matrice inversible Y telle que $S={}^tYY$. On en déduit que pour tout vecteur X, ${}^tXSX={}^t(YX)YX=\langle YX,YX\rangle\geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $YX=0$ ou encore $X=0$ car YT est inversible. Par suite, pour tout vecteur non nul X, ${}^tXSX>0$.

Vérifions alors que B est définie positive. Soit X un vecteur non nul.

$$ {}^tXBX=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}{}^tXA_iX\geqslant 0, $$

avec égalité si et seulement si pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}{}^tXA_iX=0$ (car ces réels sont positifs) ou encore pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, ${}^tXA_iX=0$ (car les $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}$ sont strictement positifs) ou enfin $X=0$ (car les A_i sont définies positives). Donc la matrice B est définie positive. Mais alors

$$ \begin{aligned} \det(\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_{k+1}A_{k+1}) &= \det((1-\alpha_{k+1})B+\alpha_{k+1}A_{k+1}) \\ &\geqslant (\det(B))^{1-\alpha_{k+1}}(\det(A_{k+1}))^{\alpha_{k+1}}=\left(\det\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}A_i\right)\right)^{1-\alpha_{k+1}}(\det(A_{k+1}))^{\alpha_{k+1}} \\ &\geqslant \left(\prod_{i=1}^{k}(\det(A_i))^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}}\right)^{1-\alpha_{k+1}}(\det(A_{k+1}))^{\alpha_{k+1}}\ \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1}(\det(A_i))^{\alpha_i} \end{aligned} $$

Le résultat est démontré par récurrence.

