SESSION 2009

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE PSI

Partie I - Valeurs propres de AB *et* BA

I.A - Cas de la valeur propre 0.

I.A.1) $0 \in \mathrm{Sp}(AB) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(AB) \neq \{0\} \Leftrightarrow AB \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(AB) = 0$.

I.A.2) $0 \in \mathrm{Sp}(AB) \Leftrightarrow \det(AB) = 0 \Leftrightarrow \det(A) \times \det(B) = 0 \Leftrightarrow \det(B) \times \det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(BA) = 0 \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(BA)$.

I.B -

I.B.1) Puisque $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$, $ABX = \lambda X \neq 0$. Ensuite, comme $ABX \neq 0$, on ne peut avoir $BX = 0$ et donc $BX \neq 0$.

I.B.2) $(BA)(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX$ et puisque $BX \neq 0$, BX est vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.

I.B.3) D'après I.A.2) et I.B.2), si λ est un réel valeur propre de la matrice AB, alors λ est valeur propre de la matrice BA. En échangeant les rôles de A et B, on a montré que pour tout réel λ, λ est valeur propre de la matrice AB si et seulement si λ est valeur propre de la matrice BA et donc que

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{ les matrices } AB \text{ et } BA \text{ ont les mêmes valeurs propres réelles.}}$$

I.C -

I.C.1) $\det(A) \times \det(BA - xI) = \det(A(BA - xI)) = \det(ABA - xA) = \det((AB - xI)A) = \det(A) \times \det(AB - xI)$ et puisque $\det(A) \neq 0$, après simplification par $\det(A)$, on obtient $\det(BA - xI) = \det(AB - xI)$.

I.C.2) Ainsi, les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique ou encore les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes avec le même ordre ordre de multiplicité.

Partie II - Valeurs singulières d'une matrice

II.A -

II.A.1) a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = 0 \Rightarrow {}^tA \times AX = {}^tA \times 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0$.

b) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$ et donc ${}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 \Rightarrow AX = 0$.

c) D'après les questions a) et b), $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(g)$. Par suite, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Mais alors d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}({}^tAA).$$

II.A.2) ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$ et donc ${}^tAA \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Puis en appliquant ce résultat à la matrice ${}^tA$, $A{}^tA \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

II.A.3) Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont symétriques réelles. D'après le théorème spectral, ces matrices sont orthogonalement semblables à une matrice diagonale réelle. De plus, d'après la question I.C-, les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont les mêms valeurs propres réelles avec le même ordre de multiplicité. Par suite, ces matrices sont orthogonalement semblables à une même matrice diagonale réelle. Donc

$$\exists D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}),\ \exists (P, Q) \in (O_n(\mathbb{R}))^2 /\ {}^tAA = PD{}^tP \text{ et } A{}^tA = QD{}^tQ.$$

II.A.4) Le nombre de termes diagonaux non nuls de D est le rang de D. Puisque deux matrices semblables ont même rang et d'après la question II.A.1)c), $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A) = r$ et donc D possède exactement r termes diagonaux non nuls.

II.A.5) a) $D = P^{-1}{}^tAA({}^tP)^{-1} = {}^tP{}^tAAP = {}^t(AP)AP$ et en posant $M = AP$, $A = {}^tMM$.

b) Soient $i \in [\![1, n]\!]$ puis X_i un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_i. On a ${}^tX_iDX_= \lambda_i{}^tX_iX_i = \lambda\|X_i\|^2$ mais aussi ${}^tX_iDX_i = {}^tX_i{}^tMMX_i = {}^t(MX_i)MX_i = \|MX_i\|^2$. Comme $X_i \neq 0$, $\|X_i\|^2 > 0$ et donc $\lambda_i = \dfrac{\|MX_i\|^2}{\|X_i\|^2} \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \in [0, +\infty[.}$$

II.A.6) Soient U et V deux matrices orthogonales puis $A' = UAV$. Alors

$$ {}^tA'A' = {}^tV{}^tA{}^tUUAV = V{-}1({}^tAA)V. $$

Ainsi, les matrices ${}^tA'A'$ et ${}^tAA$ sont semblables. On en déduit que les matrices ${}^tA'A'$ et ${}^tAA$ ont la même famille de valeurs propres ou encore que les matrices A et A' ont les mêmes valeurs singulières.

II.A.7) A est symétrique réelle et donc ses valeurs propres sont toutes réelles. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Alors $\mathrm{Sp}({}^tAA) = \mathrm{Sp}(A^2) = (\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$ et les valeurs singulières de A sont les $\sqrt{\mu_i^2} = |\mu_i|$.

$$\boxed{\text{Les valeurs singulières d'une matrice symétrique réelle sont les valeurs absolues de ses valeurs propres.}}$$

II.B -

II.B.1) L'endomorphisme g est symétrique et d'après le théorème spectral, l'endomorphisme g est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de g associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de valeurs propres de g. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_i = (e_i)_{\mathscr{B}}$ où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$. Alors,

- $\forall i \in [\![1, \rho]\!]$, ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$,
- la famille $(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ est une famille orthonormée de $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et puisque d'autre part, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \rho = \mathrm{card}(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$, la famille $(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f)$.

II.B.2) D'après la question I.B.1), $\forall i \in [\![1, \rho$, $AX_i \neq 0$ et donc AX_i est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$.
Ensuite, soit $(i, j) \in [\![1, \rho]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors

$$ \langle AX_i, AX_j \rangle = {}^t(AX_i)AX_j = {}^tX_i({}^tAAX_j) = {}^tX_i(\lambda_j X_j) = \lambda_j \langle X_i, X_j \rangle = 0. $$

Donc, la famille $(AX_1, \ldots, AX_\rho)$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls et en particulier une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. Enfin, $\mathrm{card}(AX_1, \ldots, AX_\rho) = \rho = \dim(\mathrm{Im}(f))$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (AX_1, \ldots, AX_\rho) \text{ est une base orthogonale de } \mathrm{Im}(f).}$$

II.B.3) Soit $i \in [\![1, \rho$. Le calcul de la question précédente fournit

$$ \|AX_i\|^2 = \langle AX_i, AX_i \rangle = \lambda_i \langle X_i, X_i \rangle = \lambda_i \|X_i\|^2 = \lambda_i $$

et donc $\|AX_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, \rho]\!],\ \|AX_i\| = \sigma_i.}$$

II.B.4) Pour $i \in [\![1, \rho[\![$, on pose $Y_i = \dfrac{1}{\sigma_i} AX_i$. D'après ce qui précède, la famille $(Y_1, \ldots, Y_\rho)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On complète cette famille en $\mathscr{B}_2 = (Y_1, \ldots, Y_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Par construction, si $i \in [\![1, \rho]\!]$, alors $AX_i = \sigma_i Y_i$ et si $i \in [\![\rho + 1, \ldots, n]\!]$, $AX_i = 0 = \sigma_i Y_i$. Finalement, $\mathscr{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \sigma_i Y_i$ ou encore telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

II.B.5) Posons $P_1 = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_2}$ et $P_2 = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}}$. Puisque P_1 et P_2 sont deux matrices de passage d'une base orthonormée à une autre, P_1 et P_2 sont deux matrices orthogonales et de plus les formules de changement de bases fournissent

$$ A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_2} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) \times P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}} = P_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) P_2. $$

II.C -

II.C.1) D'après la question II.B.5), si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les valeurs singulières de A, alors il existe deux matrices orthogonales telles que $A = Q_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) Q_2$.
Réciproquement, supposons qu'il existe deux matrices orthogonales Q_1 et Q_2 telles que $A = Q_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) Q_2$. D'après la question II.A.6), les valeurs singulières de A sont les valeurs singulières de $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ c'est-à-dire les $\sqrt{\sigma_i^2} = \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

II.C.2) Si $\exists (R_1, R_2) \in (O(n))^2$, $A = R_1 B R_2$ alors A et B ont les mêmes valeurs singulières d'après la question II.A.6).
Réciproquement, soient A et B deux matrices réelles ayant les mêmes valeurs singulières. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ces valeurs singulières communes. D'après la question précédente, il existe des matrices orthogonales P_1, P_2, Q_1 et Q_2 telles que $A = P_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) P_2$ et $B = Q_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) Q_2$. Mais alors

$$ A = P_1 \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) P_2 = (P_1 {}^tQ_1) B (Q_2 P_2). $$

Les matrices $R_1 = P_1 {}^tQ_1$ et $R_2 = Q_2P_2$ sont deux matrices orthogonales (en tant que produits de matrices orthogonales) telles que $A = R_1BR_2$.

Partie III - Etude géométrique d'un exemple

III.A -

III.A.1) Notons L_1, L_2 et L_3 les lignes de A. La famille (L_1, L_2) est libre et donc $\text{rg}(A) \geqslant 2$. Mais L_3 est nulle et donc $\text{rg}(A) \leqslant 2$. Finalement

$$\boxed{\text{rg}(A) = 2.}$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.A.2) $\chi_{{}^tAA} = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)^2+(X-1)+(X-1) = (X-1)((2-X)(X-1)+2) = -X(X-1)(X-3).$

Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{les valeurs singulières de } A \text{ sont } \sigma_1 = \sqrt{3},\ \sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_3 = 0.}$$

III.A.3) • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $X \in \text{Ker}({}^tAA - 3I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y+z=0 \\ -x-2y=0 \\ x-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x/2 \\ z=x/2 \end{array}\right.$.

On prend $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $X \in \text{Ker}({}^tAA - I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ -x=0 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=z \end{array}\right.$.

On prend $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $X \in \text{Ker}({}^tAA) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ -x+y=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ z=-x \end{array}\right.$.

On prend $X_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

III.A.4) D'après la question II.B.4), on peut prendre

$$Y_1 = \frac{1}{\sigma_1}AX_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$Y_2 = \frac{1}{\sigma_2}AX_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on peut prendre

$$Y_3 = Y_1 \wedge Y_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III.A.5) Ce résultat a été démontré à la question II.B.5). Vérifions le explicitement.

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_2}\times \mathrm{Diag}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\,{}^tP_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A.$$

III.B - On pose $\mathscr{B}=(i,j,k)$.

III.B.1) S est contenue dans $\mathrm{Im}(f)$ qui est un plan puisque $\mathrm{rg}(f)=2$. On sait que les colonnes de la matrice A fournissent une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Vect}(i,j)$ puis que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(i,j)$ pour des raisons de dimension. Ceci montre qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est (i,j) et une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$ est $z=0$.

$$\boxed{S \text{ est contenue dans le plan d'équation } z=0.}$$

III.B.2) Pour tout vecteur colonne X, $AX=QD{}^tPX=QDX'$ où $X'={}^tPX$. Maintenant, la matrice ${}^tP$ est une matrice orthogonale et on sait que l'application $X\mapsto {}^tPX$ est une bijection de la sphère unité sur elle-même. On en déduit que X décrit la sphère unité si et seulement si X' décrit la sphère unité et donc que

$$\boxed{S=\{QDX',\ X'\in\mathbb{R}^3,\ \|X'\|=1\}.}$$

III.B.3) Si on pose $X'=ui+vj+wk$, $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$, $u^2+v^2+w^2=1$, alors $QDX'=Q(\sqrt{3}ui+vj)=u\sqrt{3}Y_1+vY_2$.

Soit Y un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (y_1,y_2,y_3) dans la base $\mathscr{B}_2$ (on prend donc $\mathscr{B}'=\mathscr{B}_2$).

$$Y\in S\Leftrightarrow \exists(u,v,w)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}y_1=u\sqrt{3}\\ y_2=v\\ y_3=0\end{array}\right. \text{ et } u^2+v^2+w^2=1\Leftrightarrow \exists(\theta,w)\in[0,2\pi]\times[-1,1]/\ \left\{\begin{array}{l}y_1=\sqrt{1-w^2}\sigma_1\cos(\theta)\\ y_2=\sqrt{1-w^2}\sigma_2\sin(\theta)\\ y_3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists w\in[-1,1]/\ \left\{\begin{array}{l}\frac{y_1}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}=1-w^2\\ y_3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{y_1}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}\leqslant 1\\ y_3=0\end{array}\right.$$

III.B.4) S est l'intérieur d'une ellipse de demi grand axe $\sqrt{3}$ et de demi petit axe 1, frontière comprise.

Partie IV - Image de la sphère unité

IV.A -

IV.A.1) Puisque $\mathrm{rg}(A)=3$, on a encore $\mathrm{rg}({}^tAA)=3$ d'après la question II.A.1)b) et la matrice ${}^tAA$ est inversible. Par suite, 0 n'est pas valeur propre de la matrice ${}^tAA$. On en déduit que 0 n'est pas valeur singulière de A et puisque d'autre part, les valeurs singulières de A sont des réels positifs, on a montré que les valeurs singulières de A sont trois réels strictement positifs.

IV.A.2) On reprend les notations de la question III.B.2) et en particulier on reprend $\mathscr{B}'=\mathscr{B}_2$. Soit $Y=(y_1,y_2,y_3)_{\mathscr{B}_2}$.

$$Y\in S\Leftrightarrow \exists(u,v,w)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}y_1=\sigma_1u\\ y_2=\sigma_2v\\ y_3=\sigma_3w\end{array}\right. \text{ et } u^2+v^2+w^2=1\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{y_3^2}{\sigma_3^2}=1.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } S \text{ dans la base orthonormée } \mathscr{B}_2 \text{ est } \frac{y_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{y_3^2}{\sigma_3^2}=1.}$$

IV.A.3) S est un ellipsoïde.

IV.B -

IV.B.1) Puisque rg$(A) = 1$, rg$({}^tAA) = 1$. La matrice non inversible ${}^tAA$ admet déjà trois valeurs propres réelles, l'une au moins de ces valeurs propres étant nulle. De plus, la matrice ${}^tAA$ étant diagonalisable car symétrique réelle, l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est la dimension du sous-espace propre associé à savoir Ker$({}^tAA)$. Puisque Ker$({}^tAA)$ est de dimension 2, 0 est valeur propre d'ordre 2. Finalement, exactement deux des valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont nulles et donc A admet trois valeurs singulières σ_1, σ_2 et σ_3 telles que $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

IV.B.2) Toujours avec les notations de la question III.B.2), en posant $Y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathscr{B}_2}$

$$Y \in S \Leftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} y_1 = \sigma_1 u \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \text{ et } u^2 + v^2 + w^2 = 1 \Leftrightarrow \exists u \in [-1, 1] / \left\{\begin{array}{l} y_1 = \sigma_1 u \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{array}\right. .$$

S est le segment $[MN]$ où $M = (-\sigma_1, 0, 0)_{\mathscr{B}_2}$ et $N = (\sigma_1, 0, 0)_{\mathscr{B}_2}$. En particulier, S est un segment de longueur $2\sigma_2$.

Partie V - Pseudo-inverse d'une matrice

V.A - Puisque les matrices ${}^tQ_2$ et ${}^tQ_1$ sont inversibles, le rang de A est le rang de Diag$\left(\dfrac{1}{\sigma_1}, \dots, \dfrac{1}{\sigma_p}, 0, \dots, 0\right)$. On en déduit que rg$(A) = p$ car le rang d'une matrice diagonale est le nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.

V.B -

$$\begin{aligned} AA^+ &= Q_1 \text{Diag}\,(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0)\, Q_2 {}^tQ_2 \text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_p}, 0, \dots, 0\right) {}^tQ_1 \\ &= Q_1 \text{Diag}\,(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0)\, \text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_p}, 0, \dots, 0\right) {}^tQ_1 = Q_1 \text{Diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, 0, \dots, 0\right) {}^tQ_1 \end{aligned}$$

En particulier, si A est inversible, $p = n$ et donc $AA^+ = Q_1 \text{Diag}\,(1, \dots, 1)\, {}^tQ_1 = Q_1 I {}^tQ_1 = I$. Par suite, $A^+ = A^{-1}$.

V.C - Posons $\Delta = \text{Diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, 0, \dots, 0\right)$.

On sait que l'on peut prendre pour Q_1 la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_2$. Puisque $P = AA^+ = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$, $\Delta = Q_1^{-1} P Q_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(h)$. Par suite, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $h(Y_i) = Y_i$ et $\forall i > p$, $h(Y_i) = 0$. Puisque la base $\mathscr{B}_2$ est orthonormée, h est la projection orthogonale sur Vect$(Y_1, \dots, Y_p)$. Le rang de h est la dimension de Vect$(Y_1, \dots, Y_p)$ à savoir p.

V.D - Im$(h) = $ Vect$(Y_1, \dots, Y_p) = $ Im(f) d'après la question II.B.2).

V.E - Dire que le système $AX = Y$ n'a pas de solution équivaut à dire que $Y \notin$ Im(f). Soit $X_0 = A^+Y$ de sorte que $AX_0 = AA^+Y = PY$. On sait que la distance de Y à un élément de Im(f) est supérieure ou égale à la distance de Y à son projeté orthogonal sur Im(f). Ce projeté est $PY = AX_0$ d'après les questions précédentes et donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|Y - AX\| \geqslant \|Y - AX_0\|.$$

Le vecteur $X_0 = A^+Y$ est donc un vecteur rendant minimale la norme de $Y - AX$, $X \in \mathbb{R}^n$.

