SESSION 2008

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES II. FILIERE PSI

Partie I - Généralités sur les distances

I.A - Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$. $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(({}^tA)A\right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_3)} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{\forall A \in O_3(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sqrt{3}.}$$

I.B - D'après I.A-, $O_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Vérifions que $O_3(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $O_3(\mathbb{R})$.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$. On a $O_3(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_3\})$.
Soient alors $g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$ de sorte que $f = h \circ g$. L'application g est linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et donc g est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application h est bilinéaire sur $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et donc h est continue sur $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$. Mais alors, puisque $f = h \circ g$, f est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En résumé, $O_3(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{I_3\}$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par l'application f qui est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On en déduit que $O_3(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, $O_3(\mathbb{R})$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ et finalement

$$\boxed{O_3(\mathbb{R}) \text{ est un compact de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

I.C - On sait que pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$,

$$|\|M\| - \|N\|| \leq \|M - N\|.$$

Ceci signifie que l'application $\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ M & \mapsto & \|M\| \end{array}$ est 1-Lipschitzienne. En particulier, cette application est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } M \mapsto \|M\| \text{ est continue sur } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

I.D - Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, l'application $M \mapsto \|M - A\|$ est continue (composée de la translation $M \mapsto M - A$ puis de $M \mapsto \|M\|$) sur le compact $O_3(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait alors que l'application $M \mapsto \|M - A\|$ admet un minimum sur $O_3(\mathbb{R})$ ou encore il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $d(A, O_3(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

I.E -

I.E.1) Soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ puis $U \in O_3(\mathbb{R})$.

$$d(M, O_3(\mathbb{R})) \leq \|M - U\| = \|(M - N) + (N - U)\| \leq \|N - U\| + \|N - M\|.$$

En choisissant de plus U telle que $\|N - U\| = d(N, O_3(\mathbb{R})$, on obtient

$$d(M, O_3(\mathbb{R})) \leq d(N, O_3(\mathbb{R}) + \|N - M\|.$$

I.E.2) Ainsi, pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, on a $\Phi(M) - \Phi(N) \leq \|M - N\|$. En échangeant les rôles de M et N, pour tout $(M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ on a aussi $\Phi(N) - \Phi(M) \leq \|M - N\|$ et finalement

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ |\Phi(M) - \Phi(N)| \leq \|M - N\|.$$

Ceci montre que Φ est 1-Lipscitzienne et en particulier

$$\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

I.F -

I.F.1) Soit $Q = \{M \in P / \Phi(M) \leq \Phi(0)\}$. Puisque $Q \subset P$, $\underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$ est un minorant de $\{\Phi(M),\ M \in Q\}$ et donc $\underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M) \leq \underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$.
Mais d'autre part, pour $M \in P$, si $M \in Q$, $\Phi(M) \geq \underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$ et si $M \notin Q$, $\Phi(M) > \Phi(0) \geq \underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$ (car $0 \in Q$). Par suite, $\underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$ est un minorant de $\{\Phi(M),\ M \in P\}$ et donc $\underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M) \leq \underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$.
Finalement

$$d(P, O_3(\mathbb{R})) = \underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M) = \underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M).$$

Vérifions alors que Q est bornée. Soit $M \in Q$. D'après la question I.D-, il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(M) = \|M - U\|$. Mais alors, d'après la question I.A-,

$$\|M\| \leq \|M - U\| + \|U\| = \Phi(M) + \|U\| \leq \Phi(0) + \sqrt{3}.$$

Ainsi, en posant $r = \Phi(0) + \sqrt{3}>0$, on a $\|M\| \leq r$ pour tout $M \in Q$. On en déduit que $Q \subset P \cap B_r$ et donc que

$$d(P, O_3(\mathbb{R})) = \underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M) \leq \underset{M\in P\cap B_r}{\text{Inf}}\,\Phi(M) \leq \underset{M\in Q}{\text{Inf}}\,\Phi(M) = \underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M),$$

et finalement que

$$d(P, O_3(\mathbb{R})) = \underset{M\in P}{\text{Inf}}\,\Phi(M) = \underset{M\in P\cap B_r}{\text{Inf}}\,\Phi(M).$$

$$\boxed{\exists r > 0/\ d(P, O_3(\mathbb{R})) = \underset{M\in P\cap B_r}{\text{Inf}}\,\Phi(M).}$$

I.F.2) $d(P, O_3(\mathbb{R})) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbb{R})) = \underset{M\in P\cap B_r}{\text{Inf}}\,\Phi(M)$. Maintenant, P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en particulier P est un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Mais alors, $P \cap B_r$ est un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$. D'autre part, $P \cap B_r \subset B_r$ et donc $P \cap B_r \subset B_r$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$. Finalement, $P \cap B_r$ est un compact de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$. Puisque Φ est continue sur ce compact d'après la question précédente, Φ admet un minimum sur $P \cap B_r$. Il existe donc A dans $P \cap B_r$ et en particulier dans P telle que $d(P, O_3(\mathbb{R})) = \Phi(A) = d(A, O_3(\mathbb{R}))$.

$$\boxed{\exists A \in P/\ d(P, O_3(\mathbb{R})) = d(A, O_3(\mathbb{R})).}$$

Partie II - Décomposition polaire

II.A - Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. ${}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM$ et donc ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$. Mais alors on sait que les valeurs propres de ${}^tMM$ sont réelles.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ${}^tMM$ puis X un vecteur propre associé. On a

$$\|MX\|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX({}^tMMX) = {}^tX(\lambda X) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2,$$

et donc, puisque $\|X\|^2 > 0$,

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de ${}^tMM$ sont des réels positifs.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tMM \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R}).}$$

II.B - Soient λ_1, λ_2 , λ_3 les valeurs propres de ${}^t MM$ puis $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que ${}^t MM = PD{}^t P$.

Posons $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ puis $S = PD'{}^t P$. S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle à valeurs propres positives et donc $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$. De plus,

$$S^2 = PD'{}^t PPD'{}^t P = PD'^2{}^t P = PD{}^t P = {}^t MM.$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \exists S_\in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R}) /\ {}^t MM = S^2.}$$

II.C - Si de plus M est inversible, S l'est aussi car $(\det S)^2 = \det(S^2) = \det(tMM) = (\det M)^2 \neq 0$. Posons alors $U = MS^{-1}$. On a

$$tUU = {}^t S^{-1}{}^t MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_3.$$

U est donc une matrice orthogonale et de plus $M = US$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}),\ \exists S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R}),\ \exists U \in O_3(\mathbb{R}) /\ M = US.}$$

II.D - Étude d'un exemple

$${}^t MM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

puis $\chi_{{}^t MM} = (1 - X)(X^2 - 5X + 4) = -(X - 1)^2(X - 4)$ et donc ${}^t MM$ est orthogonalement semblable à la matrice $D = \text{diag}(1, 1, 4)$.

Déterminons les sous-espaces propres de ${}^t MM$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \text{Ker}({}^t MMM - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - \sqrt{2}z = 0 \\ -\sqrt{2}y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = y\sqrt{2}.$$

Donc, $\text{Ker}({}^t MMM - I_3) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, \sqrt{2})$ ((e_1, e_2) est une base orthonormée de $\text{Ker}({}^t MMM - I_3)$).

Ensuite, puisque ${}^t MM \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, on sait que $\text{Ker}({}^t MMM - 4I_3) = \text{Ker}({}^t MMM - I_3)^\perp$ et donc $\text{Ker}({}^t MMM - 4I_3) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, -\sqrt{2}, 1)$. Donc

$${}^t MM = PD{}^t P \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$S = P \times \text{diag}(1, 1, 2) \times {}^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{3} & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$$

et aussi (en inversant par blocs) $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{6} & \dfrac{5}{6} \end{pmatrix}$ et enfin

$$U = MS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{6} & \dfrac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{M = US \text{ où } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{3} & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}.}$$

Partie III - Distance à $O_3(\mathbb{R})$

III.A -

III.A.1) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U \in O_3(\mathbb{R})$.

$$\|UA\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t(UA)UA) = \mathrm{Tr}({}^tA{}^tUUA) = \mathrm{Tr}({}^tAI_3A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2$$

et de même

$$\|AU\|^2 = \mathrm{Tr}(AU{}^t(AU)) = \mathrm{Tr}(AU{}^tU{}^tA) = \mathrm{Tr}(A{}^tA) = \|A\|^2.$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall U \in O_3(\mathbb{R}),\ \|AU\| = \|UA\| = \|A\|.}$$

Ensuite, d'après la question II.C-, il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$, $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale à coefficients positifs telles que $A = UPD{}^tP$. D'après le début de la question, puisque les matrices ${}^tU$, P et ${}^tP$ sont des matrices orthogonales, pour toute matrice orthogonale V, on a

$$\|A - V| = \|UPD{}^tP - V\| = \|{}^tP{}^tU(UPD{}^tP - V)P\| = \|D - {}^tU{}^tPVP\|.$$

Maintenant, la matrice ${}^tU{}^tPVP$ est une matrice orthogonale. Plus précisément, l'application $\begin{array}{rccc} f : & O_3(\mathbb{R}) & \to & O_3(\mathbb{R}) \\ & V & \mapsto & {}^tU{}^tPVP \end{array}$ est une bijection de réciproque $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & O_3(\mathbb{R}) & \to & O_3(\mathbb{R}) \\ & V & \mapsto & PUV{}^tP \end{array}$. On en déduit que V décrit $O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tU{}^tPVP$ décrit $O_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\{\|A - V\|,\ V \in O_3(\mathbb{R})\} = \{\|D - V'\|,\ V' \in O_3(\mathbb{R})\}$ et en particulier, $d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_3(\mathbb{R}))$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_3(\mathbb{R})) \text{ où } D \text{ est une matrice diagonale positive semblable à } {}^tAA.}$$

III.A.2) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = d(A, O_3(\mathbb{R}))$. Soient U et P des matrices orthogonales et D une matrice diagonale positive telles que $A = UPD{}^tP$ et soit U une matrice.
Soit $\mathcal{W} = \{{}^tU{}^tPMP,\ M \in \mathcal{V}\} = \{g(M),\ M \in \mathcal{V}\} = g(\mathcal{V})$ où $\begin{array}{rccc} g : & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & {}^tU{}^tPMP \end{array}$.

• g est bijective de réciproque $\begin{array}{rccc} g^{-1} : & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & PUM{}^tP \end{array}$. De plus, g est linéaire et donc g est un isomorphisme. Par suite, $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de même dimension que $\mathcal{V}$.
• Comme en II.A.1), $\{\|M - V\|,\ M \in \mathcal{V},\ V \in O_3(\mathbb{R})\} = \{\|g(M) - g(V)\|,\ M \in \mathcal{V},\ V \in O_3(\mathbb{R})\} = \{\|M' - V'\|,\ M' \in \mathcal{W},\ V' \in O_3(\mathbb{R})\}$ et donc $d(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R}))$.
• $d(\mathcal{W}, O_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R}) = d(A, O_3(\mathbb{R})) = d(D, O_3(\mathbb{R}))$ où $D = g(A) \in \mathcal{W}$.

On a ainsi démontré l'existence de $\mathcal{W}$.

III.B -

III.B.1) Soit $U \in O_3(\mathbb{R})$. D'après la question I.A-,

$$\|D-U\|^2 = \langle D-U, D-U\rangle = \langle D, D\rangle - 2\langle D, U\rangle + \langle U, U\rangle = \|D\|^2 - 2\langle U, D\rangle + \|U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2\right) - 2\langle U, D\rangle + 3.$$

III.B.2) Soit $U = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in O_3(\mathbb{R})$. On a donc $\forall j \in [\![1,3]\!]$, $\sum_{i=1}^{3} u_{i,j}^2 = 1$ et en particulier, $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $u_{i,i} \leq 1$. Maintenant, chaque λ_i est positif et donc

$$\langle U, D\rangle = u_{1,1}\lambda_1 + u_{2,2}\lambda_2 + u_{3,3}\lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

III.B.3) Mais alors

$$\|D-U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2\right) - 2\langle U, D\rangle + 3 \geq \left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2\right) - 2\sum_{i=1}^{3}\lambda_i + 3 = \|D - I_3\|.$$

Ainsi, $\forall U \in O_3(\mathbb{R}),\ \|D-U\| \geq \|D - I_3\|$. Comme I_3 est une matrice orthogonale, on a montré que

$$d(D, O_3(\mathbb{R})) = \text{Inf}\{\|D-U\|,\ U \in O_3(\mathbb{R})\} = \text{Min}\{\|D-U\|,\ U \in O_3(\mathbb{R})\} = \|D - I_3\|.$$

$$\boxed{d(D, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|.}$$

III.C - Étude d'un exemple

$$d(M, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\| = \|\text{diag}(1,1,2) - \text{diag}(1,1,1)\| = \|\text{diag}(0,0,1)\| = 1.$$

$$\boxed{d(M, O_3(\mathbb{R})) = 1.}$$

Partie IV - Cas d'un sous-espace de dimension 6

IV.A -

IV.A.1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2+e^2 & ab+cd+ef & 0 \\ ab+cd+ef & b^2+d^2+f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque la dernière colonne de ${}^tAA$ est nulle, 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Notons μ_1 et μ_2 les deux autres valeurs propres de ${}^tAA$ puis $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, 0)$. Alors,

$$d(A, O_3(\mathbb{R}))^2 = \|D - I_3\|^2 = \left(\sqrt{\mu_1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{\mu_2} - 1\right)^2 + 1 \geq 1.$$

Ainsi, $\forall A \in \mathcal{V},\ d(A, O_3(\mathbb{R})) \geq 1$ et donc

$$\boxed{d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \geq 1.}$$

IV.A.2) Soit $A \in \mathcal{V}$.

$$\|A - I_3\|^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2 + e^2 + f^2 + 1 \geq 1,$$

avec égalité effectivement obtenue pour $a = d = 1$ et $b = c = e = f = 0$. Donc $d(I_3, \mathcal{V}) = 1$.

Mais alors, comme $I_3 \in O_3(\mathbb{R})$, on a $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leq d(I_3, O_3(\mathbb{R}))$ et donc $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leq 1$. Finalement

$$\boxed{d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = 1.}$$

IV.B - Puisque $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\| = d(I_3, \mathcal{V})$, le théorème de la projection orthogonale montre que D est la projection orthogonale de I_3 sur $\mathcal{V}$. Donc $D - I_3 \in \mathcal{V}^\perp$ ou encore $\text{Vect}(D - I_3) \subset \mathcal{V}^\perp$ ou enfin $\mathcal{V} \subset (D - I_3)^\perp$.

$$\boxed{\mathcal{V} \subset (D - I_3)^\perp.}$$

IV.C - On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $R_1'(0) = E_{2,1} - E_{1,2}$, $R_2'(0) = E_{3,1} - E_{1,3}$ et $R_3'(0) = E_{3,2} - E_{2,3}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Puisque la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ est libre,

$$aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) = 0 \Rightarrow aE_{2,1} - aE_{1,2} + bE_{3,1} - bE_{1,3} + cE_{3,2} - cE_{2,3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc, la famille $(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'autre part, les coefficients diagonaux de chacune des matrices $R_1'(0)$, $R_2'(0)$ et $R_3'(0)$ sont nuls et donc chacune de ces matrices est orthogonale à la matrice diagonale $I_3 - D$.

$$\boxed{\text{La famille } (R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0)) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ formée de matrices orthogonales à } I_3 - D.}$$

Soit $\mathcal{F} = \text{Vect}(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$. Puisque la famille $(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ est libre, on a $\dim(\mathcal{F}) = 3$. Maintenant, les questions précédentes montrent que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ sont contenus dans $(I_3 - D)^\perp$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{V} + \mathcal{F}$ est encore contenu dans $(I_3 - D)^\perp$ qui est de dimension $9 - 1 = 8$ car $I_3 - D \neq 0$. On en déduit que

$$\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{F}) = \dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{F}) - \dim(\mathcal{V} + \mathcal{F}) = 6 + 3 - \dim(\mathcal{V} + \mathcal{F}) \geq 6 + 3 - 8 = 1 > 0$$

Ainsi, $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}$ n'est pas le sous-espace nul et donc il existe a, b et c réels non tous nuls tels que $aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$.

$$\boxed{\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)/\ aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0)) \in \mathcal{V}.}$$

IV.D - Quand t tend vers 0,

$$\begin{aligned}
R_1(at)R_2(bt)R_3(ct) &= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{a^2t^2}{2} & -at & 0 \\ at & 1 - \dfrac{a^2t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{b^2t^2}{2} & 0 & -bt \\ 0 & 1 & 0 \\ bt & 0 & 1 - \dfrac{b^2t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{c^2t^2}{2} & -ct \\ 0 & ct & 1 - \dfrac{c^2t^2}{2} \end{pmatrix} + o(t^2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{(a^2+b^2)t^2}{2} & -at & -bt \\ at & 1 - \dfrac{a^2t^2}{2} & -abt^2 \\ bt & 0 & 1 - \dfrac{b^2t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{c^2t^2}{2} & -ct \\ 0 & ct & 1 - \dfrac{c^2t^2}{2} \end{pmatrix} + o(t^2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{(a^2+b^2)t^2}{2} & -at - bct^2 & -bt + act^2 \\ at & 1 - \dfrac{(a^2+c^2)t^2}{2} & -ct - abt^2 \\ bt & ct & 1 - \dfrac{(b^2+c^2)t^2}{2} \end{pmatrix} + t^2\varepsilon(t) \text{ où } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \\
&= I_3 + tA + t^2(B + C) + t^2\varepsilon(t),
\end{aligned}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = a(E_{2,1} - E_{1,2}) + b(E_{3,1} - E_{1,3}) + c(E_{3,2} - E_{2,3}) = aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$$

puis $C = \dfrac{1}{2}\text{diag}(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$ et enfin $B = \begin{pmatrix} 0 & -bc & ac \\ 0 & 0 & -ab \\ 0 & ct & 0 \end{pmatrix} \in (I_3 - D)^\perp$ car les coefficients diagonaux de B sont tous nuls.

IV.E - Soit $t \in \mathbb{R}$.
$R_1(at)$, $R_2(bt)$ et $R_3(ct)$ sont trois matrices orthogonales et donc, puisque $(O_3(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, $f(t)$ est une matrice orthogonale. D'autre part, A et D sont dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ et il en est de même de $tA + D$. Par suite

$$\|I_3 + t^2(B + C\varepsilon(t)) - D\| = \|f(t) - (tA + D)\| \geq d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = \|I_3 - D\|.$$

IV.F - Quand t tend vers 0, puisque B est orthogonale à $I_3 - D$ et par continuité de la norme et du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\|I_3 + t^2(B + C\varepsilon(t)) - D\|^2 &= \|I_3 - D\|^2 + 2\langle I_3 - D, t^2(B + C + \varepsilon(t))\rangle + \langle t^2(B + C + \varepsilon(t)), t^2(B + C + \varepsilon(t))\rangle \\ &= \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, B + C\rangle + 2t^2\langle I_3 - D, \varepsilon(t)\rangle + t^4\langle B + C + \varepsilon(t), B + C + \varepsilon(t)\rangle \\ &= \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C\rangle + t^2\varepsilon_2(t) \text{ où } \varepsilon_2(t) \underset{t\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout réel t on a $\|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C\rangle + t^2\varepsilon_2(t) \geq \|I_3 - D\|^2$ et donc pour t non nul on a

$$\langle I_3 - D, C\rangle \geq -\frac{\varepsilon_2(t)}{2}.$$

Quand t tend vers 0, on obtient

$$\boxed{\langle I_3 - D, C\rangle \geq 0.}$$

IV.G -

$$\begin{aligned}\langle I_3 - D, C\rangle &= \frac{1}{2}((1 - x)(-a^2 - b^2) + (1 - y)(-a^2 - c^2) + (1 - z)(-b^2 - c^2)) \\ &= \frac{1}{2}(-a^2(2 - x - y) - b^2(2 - x - z) - c^2(2 - y - z)) = -\frac{1}{2}(a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z)).\end{aligned}$$

Maintenant, si les trois réels $2 - x - y$, $2 - x - z$ et $2 - y - z$ sont strictement positifs, on obtient $\langle I_3 - D, C\rangle < 0$ car l'un au moins des trois réels a^2, ou b^2 ou c^2 est strictement positif. Ceci contredit le résultat de la question précédente et donc l'un au moins des trois réels $2 - x - y$, $2 - x - z$ et $2 - y - z$ est négatif ou nul.

IV.H - D'après la question IV.B-, $D \in \mathcal{V} \subset (D - I_3)^{\perp}$. Ceci fournit $\langle D, D - I_3\rangle = 0$ ou encore $\|D\|^2 = \langle D, I_3\rangle$ ou enfin $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I - Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. E est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'autre part, F est un plan affine et G est le demi-espace fermé de frontière le plan F et ne contenant pas Ω (car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 2$).

La distance d de Ω au plan F est $d = \frac{|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} > \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, on a $R > d$ et on sait alors que $E \cap F$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{1}{2}$.
Enfin, le diamètre δ de la calotte $E \cap G$ est encore le diamètre de son cercle de base à savoir 1.

IV.J - $d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = \|I_3 - D\| = \sqrt{(1 - x)^2 + (1 - y)^2 + (1 - z)^2} = MN$ où $M(1, 1, 1)$ et $N(x, y, z)$. Maintenant, le point $N(1, 1, 1)$ est dans $E \cap G$ car $1^2 + 1^2 + 1^2 = 1 + 1 + 1$ et $1 + 1 \geq 2$. D'autre part, $N \in E \cap G$ d'après les questions IV.G- et IV.H-. On en déduit que

$$d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) = MN \leq \delta = 1.$$

$$\boxed{d(\mathcal{V}, O_3(\mathbb{R})) \leq 1.}$$

