

Question préliminaire

L'algorithme se finit car la suite des entiers k est strictement décroissante tant que k n'est pas nul et atteint donc 0 en un nombre fini d'étapes.

Si $b = 0$, la procédure affiche immédiatement $i = 1$.

Sinon, à chaque boucle le triplet (i, j, k) est transformé en le triplet $(i, j^2, \frac{k}{2})$ si k est pair et $(ij, j, k - 1)$ si k est impair. Mais alors ij^k est inchangé après chaque boucle car transformé en $i(j^2)^{k/2} = ij^k$ si k est pair et en $(ij)j^{k-1} = ij^k$ si k est impair.

A la première étape, ij^k vaut $1 \times a^b = a^b$ et à la dernière $ij^k = i \times j^0 = i$. L'algorithme affiche donc $i = a^b$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}, f(a, b) = a^b.$$

On reconnaît en fait l'algorithme d'exponentiation rapide : l'entier $b = c_0 + c_1 \times 2 + c_2 \times 2^2 + \dots + c_p 2^p$, $c_i \in \{0, 1\}$, étant décomposé en base 2, on a

$$a^b = a^{c_0} \times (a^{c_1})^2 \times \dots \times \left(\left(\left((a^{c_p})^2 \right)^2 \right) \dots \right)^2.$$

*Partie I - Récurrence en dimension 1***I.A - Algorithme en MAPLE.**

```

u := proc(a,b,u0,n)
local i;
u := u0;
if n > 0 then
  for i = 1 to n do
    u := a*u + b;
  od;
fi;
u;
end;

```

I.B - Soit k tel que $b + k = ak$ c'est-à-dire $k = \frac{b}{a-1}$. Pour tout entier naturel n on a

$$u_{n+1} + k = au_n + b + k = au_n + ak = a(u_n + k).$$

La suite $\left(u_n + \frac{b}{a-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

I.C - Pour tout entier naturel n , on a $u_n + k = (u_0 + k)a^n$ et donc $u_n = -\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n$ (avec la convention usuelle $a^0 = 1$ pour tout réel a y compris $a = 0$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n.$$

I.D - Si $u_0 = -\frac{b}{a-1}$, la suite u est constante et donc $\rho_S = 1$ si $b \neq 0$ (de sorte que $u_0 \neq 0$) et $\rho_S = +\infty$ si $b = 0$.

Supposons maintenant $u_0 \neq -\frac{b}{a-1}$.

- Si $|a| < 1$, u_n tend vers $-\frac{b}{a-1} \neq 0$ et donc $\rho_S = 1$.
- Si $|a| > 1$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n$ et donc $\rho_S = \frac{1}{|a|}$.
- Si $a = -1$, la suite u est bornée donc $\rho_S \geq 1$ mais la suite u ne tend pas vers 0 et donc $\rho_S \leq 1$. Dans ce cas, $\rho_S = 1$.

$$\begin{array}{l} \text{Si } |a| \leq 1, \rho_S = 1 \text{ si } u_0 \neq -\frac{b}{a-1} \text{ ou si } u_0 = -\frac{b}{a-1} \text{ et } b \neq 0 \text{ et } \rho_S = +\infty \text{ si } u_0 = -\frac{b}{a-1} \text{ et } b = 0. \\ \text{Si } |a| > 1, \rho_S = \frac{1}{|a|} \text{ si } u_0 \neq -\frac{b}{a-1}, \rho_S = 1 \text{ si } u_0 = -\frac{b}{a-1} \text{ et } b \neq 0 \text{ et } \rho_S = +\infty \text{ si } u_0 = -\frac{b}{a-1} \text{ et } b = 0. \end{array}$$

Si $|a| \leq 1$, ρ_S vaut au moins 1 et si $|a| > 1$, ρ_S vaut au moins $\frac{1}{|a|}$. Sans tous les cas, ρ_S vaut au moins $\text{Min}\left\{1, \frac{1}{|a|}\right\}$ avec la convention $\frac{1}{0} = \infty$. ρ_S est en particulier strictement positif dans tous les cas.

I.E - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho_S$. On a en particulier $|z| < 1$ et aussi $az \neq 1$ puis

$$z \sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + b)z^n = z \left(aS(z) + \frac{b}{1-z} \right),$$

et aussi

$$z \sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + b)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = S(z) - u_0.$$

Par suite, $(1-az)S(z) = \frac{bz}{1-z} + u_0$ et finalement $S(z) = \frac{u_0}{1-az} + \frac{bz}{(1-z)(1-az)}$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < \rho_S \Rightarrow S(z) = \frac{u_0}{1-az} + \frac{bz}{(1-z)(1-az)} \right).$$

I.F - Les suites (u_n) et (u_{n+1}) sont dominées par une certaine suite géométrique (q^n) . On en déduit que les suites $\left(\frac{u_n}{n!}\right)$ et $\left(\frac{u_{n+1}}{n!}\right)$ sont dominées par $\frac{q^n}{n!}$. Comme le rayon associé à cette dernière suite est infini, on a montré que

$$\rho_G = \rho_{G'} = +\infty.$$

Pour tout réel x , on a

$$\frac{dG}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \times nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n.$$

I.G - Pour tout réel,

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{au_{n+1} + b}{n!} x^n = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = aG(x) + be^x.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = aG(x) + e^x &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-ax}G'(x) - ae^{-ax}G(x) = be^{(1-a)x} \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{-ax}G)'(x) = be^{(1-a)x} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-ax}G(x) - e^0G(0) = \frac{b}{1-a}(e^{(1-a)x} - 1) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)e^{ax} - \frac{b}{a-1}e^x \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = u_0e^{ax} + b\frac{e^{ax} - e^x}{a-1}. \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = u_0 e^{ax} + b \frac{e^{ax} - e^x}{a-1}.$$

I.H - Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{x^n}{n!} + \frac{b}{a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (a^n - 1) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on réobtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{b}{a-1} + \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) a^n.$$

Algorithme en MAPLE.

```

u := proc(a,b,u0,n)
u := -b/(a-1) + (u0+b/(a-1))*a^n;
u;
end;

```

Le nombre d'opérations de cet algorithme est de l'ordre de n de même que le nombre d'opérations de l'algorithme du I.A-. Les deux algorithmes sont donc aussi rapides. Si on utilise de plus l'algorithme d'exponentiation rapide décrit dans la question préliminaire pour calculer a^n , le nombre d'opérations est alors de l'ordre de $\ln n$ et l'algorithme ainsi obtenu est alors bien plus rapide.

Partie II - Récurrence en dimension 2

II.A - On a $a + d = \text{Tr}(M) = \lambda + \mu$. On en déduit que $d = \lambda + \mu - a$. On a aussi $ad - bc = \det(M) = \lambda\mu$ et donc, puisque $b \neq 0$,

$$c = \frac{ad - \lambda\mu}{b} = \frac{a(\lambda + \mu - a) - \lambda\mu}{b} = \frac{-a^2 + a(\lambda + \mu) - \lambda\mu}{b}$$

Le système (7) s'écrit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = \frac{-a^2 + a(\lambda + \mu) - \lambda\mu}{b} u_n + (\lambda + \mu - a)v_n \end{cases}.$$

Puisque M admet deux valeurs propres simples, M est diagonalisable et ses deux sous-espaces propres sont deux droites. Un vecteur engendrant le noyau de $M - \lambda I_3$ est $e_1 = (-b, a - \lambda)$ car $b \neq 0$ et un vecteur engendrant noyau de $M - \mu I_3$ est $e_2 = (-b, a - \mu)$. Donc

$$M = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -b & -b \\ a - \lambda & a - \mu \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(\lambda, \mu).$$

De plus, $\det(M) = b(\mu - \lambda)$ et donc $P^{-1} = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} a - \mu & b \\ -a + \lambda & -b \end{pmatrix}$. Mais alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} -b & -b \\ a - \lambda & a - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - \mu & b \\ -a + \lambda & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} -b\lambda^n & -b\mu^n \\ (a - \lambda)\lambda^n & (a - \mu)\mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - \mu & b \\ -a + \lambda & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} ab(\mu^n - \lambda^n) + b(\mu\lambda^n - \lambda\mu^n) & b^2(\mu^n - \lambda^n) \\ (a - \lambda)(a - \mu)(\lambda^n - \mu^n) & b((a - \lambda)\lambda^n - (a - \mu)\mu^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} \begin{pmatrix} ab(\mu^n - \lambda^n) + b(\mu\lambda^n - \lambda\mu^n) & b^2(\mu^n - \lambda^n) \\ (a - \lambda)(a - \mu)(\lambda^n - \mu^n) & b((a - \lambda)\lambda^n - (a - \mu)\mu^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

II.B - Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$,

$$\begin{cases} z \sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n)z^n = z(aS(z) + bT(z)) \\ z \sum_{n=0}^{+\infty} (cu_n + dv_n)z^n = z(cS(z) + dT(z)) \end{cases}$$

mais aussi

$$\begin{cases} z \sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^{n+1} = S(z) - u_0 \\ z \sum_{n=0}^{+\infty} (cu_n + dv_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}z^{n+1} = T(z) - v_0 \end{cases}.$$

$S(z)$ et $T(z)$ sont solutions du système $\begin{cases} z(aS(z) + bT(z)) = S(z) - u_0 \\ z(cS(z) + dT(z)) = T(z) - v_0 \end{cases}$ qui s'écrit encore $\begin{cases} (1 - az)S(z) - bzT(z) = u_0 \\ -czS(z) + (1 - dz)T(z) = v_0 \end{cases}$.

Le déterminant de ce système vaut

$$(1 - az)(1 - dz) - bcz^2 = 1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2 = 1 - (\lambda + \mu)z + \lambda\mu z^2 = (1 - \lambda z)(1 - \mu z).$$

Pour z tel que $|z| < \rho$ et $(1 - \lambda z)(1 - \mu z) \neq 0$, les formules de CRAMER fournissent

$$S(z) = \frac{u_0(1 - dz) + v_0bz}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2} \text{ et } T(z) = \frac{v_0(1 - az) + u_0cz}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2}.$$

Donc $|z| < \rho$ et $(1 - \lambda z)(1 - \mu z) \neq 0$

$$\begin{aligned} S(z) &= u_0 \frac{1 - dz}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2} + v_0 \frac{bz}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2} \\ &\text{et} \\ T(z) &= u_0 \frac{cz}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2} + v_0 \frac{1 - az}{1 - (a + d)z + (ad - bc)z^2}. \end{aligned}$$

Les suites u et v sont de la forme $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Donc $\rho \geq \frac{1}{\text{Max}\{|\lambda|, |\mu|\}} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|} \right\}$ avec la convention $\frac{1}{0} = \infty$.

II.C - Les suites u et v sont dominées par des suites géométriques et donc

$$\rho_G = \rho_{G'} = +\infty.$$

II.D - Pour tout réel x ,

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{au_n + bv_n}{n!} x^n = aG(x) + bH(x),$$

et de même $H'(x) = cG(x) + dH(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix}.$$

Mais alors

$$\begin{pmatrix} G''(x) \\ H''(x) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix}.$$

II.E - Maintenant, d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0$ et donc pour tout réel x ,

$$\begin{pmatrix} G''(x) \\ H''(x) \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} G'(x) \\ H'(x) \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = (M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2) \begin{pmatrix} G(x) \\ H(x) \end{pmatrix} = 0.$$

G et H sont solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - (a+d)y' + (ad-bc)y = 0$.

Le WRONSKIEN en 0 de ces deux solutions est $G(0)H'(0) - H(0)G'(0) = u_0v_1 - u_1v_0$ et on sait que

(G, H) est une base de l'espace des solutions de (E) si et seulement si $u_0v_1 - u_1v_0 \neq 0$.

II.F - L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' - (a+d)y' + (ad-bc)y = 0$ est $r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0$. Cette équation admet les deux solutions distinctes λ et μ et on sait que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Par suite, il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que pour tout réel x , $G(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$ et $H(x) = \gamma e^{\lambda x} + \delta e^{\mu x}$.

De plus en évaluant G et G' en 0, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{cases},$$

ce qui fournit $\alpha = \frac{\mu u_0 - u_1}{\mu - \lambda}$ et $\beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\mu - \lambda}$. De même, $\gamma = \frac{\mu v_0 - v_1}{\mu - \lambda}$ et $\delta = \frac{v_1 - \lambda v_0}{\mu - \lambda}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{\mu u_0 - u_1}{\mu - \lambda} e^{\lambda x} + \frac{u_1 - \lambda u_0}{\mu - \lambda} e^{\mu x} \text{ et } H(x) = \frac{\mu v_0 - v_1}{\mu - \lambda} e^{\lambda x} + \frac{v_1 - \lambda v_0}{\mu - \lambda} e^{\mu x}.$$

Partie III - Transformation de Laplace

III.A - Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) > \alpha$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $f(t)e^{-\alpha t} = O(1)$ fournit $|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\text{Re}(p)t} = O(e^{-(\text{Re}(p)-\alpha)t})$ et en particulier, d'après un théorème de croissances comparées, $f(t)e^{-pt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque $\text{Re}(p) - \alpha > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. $\text{Lap}(f)(p)$ est donc une intégrale convergente.

III.B - Soit A un réel strictement positif. Les deux fonctions f et $t \mapsto e^{-pt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^A + p \int_0^A f(t)e^{-pt} dt = f(A)e^{-pA} - f(0) + p \int_0^A f(t)e^{-pt} dt.$$

Maintenant, quand t tend vers $+\infty$, $f(t)e^{-pt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)e^{-pA} = 0$. Comme d'autre part, $\int_0^A f(t)e^{-pt} dt$ a une limite dans \mathbb{C} quand A tend vers $+\infty$, on en déduit que $\int_0^A f'(t)e^{-pt} dt$ a une limite dans \mathbb{C} quand A tend vers $+\infty$ ce qui montre que $\text{Lap}(f')(p)$ est une intégrale convergente et de plus quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\text{Lap}(f')(p) = -f(0) + p\text{Lap}(f)(p)$.

$$\forall p \in \mathbb{C}, (\text{Re}(p) > \alpha \Rightarrow \text{Lap}(f')(p) = -f(0) + p \text{Lap}(f)(p)).$$

III.C - Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) > \frac{1}{\rho_S}$ où ρ_S a été défini en I.D.-

$$\begin{aligned} \text{Lap}(G)(p) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^n e^{-u} \frac{du}{p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n! p^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n! p^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{p^{n+1}} = \frac{1}{p} S\left(\frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{C}, (\operatorname{Re}(p) > 0) \Rightarrow \operatorname{Lap}(G)(p) = \frac{1}{p} S\left(\frac{1}{p}\right).$$

III.D - D'après I.G-, pour tout réel x on a $G'(x) = aG(x) + be^x$ et donc pour $p \in \mathbb{C}$ de partie réelle suffisamment grande, $\operatorname{Lap}(G')(p) - a\operatorname{Lap}(G)(p) = b\operatorname{Lap}(\exp)(p)$.

Maintenant, d'après la question II.B-, $\operatorname{Lap}(G')(p) - a\operatorname{Lap}(G)(p) = -G(0) + (p-a)\operatorname{Lap}(G)(p) = -u_0 + \frac{p-a}{p} S\left(\frac{1}{p}\right)$. Or,

$$\operatorname{Lap}(\exp)(p) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt} dt = \left[-\frac{e^{-(p-1)t}}{p-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1},$$

et donc $-u_0 + \frac{p-a}{p} S\left(\frac{1}{p}\right) = b \frac{1}{p-1}$. En posant $p = \frac{1}{x}$, on obtient $-u_0 + (1-ax)S(x) = \frac{bx}{1-x}$ et on retrouve $S(x) = \frac{u_0}{1-ax} + \frac{bx}{(1-x)(1-ax)}$.

Partie IV - Une récurrence explosive

IV.A -

IV.A.1) Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a $(u+v)^2 \geq 0$ et $(u-v)^2 \geq 0$. On en déduit que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $-u^2 - v^2 \leq 2uv \leq u^2 + v^2$.

IV.A.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $M_n = \begin{pmatrix} an & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. La récurrence (11) s'écrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M_n X_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le déterminant de M_n est $adn^2 - bc$. Ce déterminant est nul si et seulement si $\frac{bc}{ad} = n^2$ pour un certain entier naturel n ce qui est exclu par l'énoncé. On en déduit que pour tout entier naturel n , M_n est une matrice inversible. Par hypothèse, X_0 est un vecteur colonne non nul puis, pour $n \geq 1$, $X_n = M_{n-1} \times \dots \times M_1 \times M_0 \times X_0 \neq 0$ car $X_0 \neq 0$ et $M_{n-1} \times \dots \times M_1 \times M_0 \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Finalement, pour tout entier naturel n , on a $X_n \neq 0$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega(n) \neq 0.$$

Soit $n \geq 1$.

$$\omega(n+1) = (anu_n + bv_n)^2 + (cu_n + ndv_n)^2 = n^2(a^2u_n^2 + d^2v_n^2) + 2(ab + cd)nu_nv_n + (b^2u_n^2 + c^2v_n^2).$$

D'après la question précédente, en posant $A = \max\{|a|, |d|\}$ et $B = \max\{|b|, |c|\}$

$$\omega(n+1) \leq A^2 n^2 \omega(n) + |ab + cd| n \omega(n) + B^2 \omega(n)$$

et donc

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2 \omega(n)} \leq A^2 + \frac{|ab + cd|}{n} + \frac{B^2}{n^2} = \beta(n).$$

De même, en posant $C = \min\{|a|, |d|\}$ et $D = \min\{|b|, |c|\}$,

$$\omega(n+1) \leq C^2 n^2 \omega(n) - |ab + cd| n \omega(n) + D^2 \omega(n)$$

et donc

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2 \omega(n)} \leq C^2 - \frac{|ab + cd|}{n} + \frac{D^2}{n^2} = \alpha(n).$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\alpha(n) \rightarrow C^2$ et $\beta(n) \rightarrow A^2$ et donc $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites finies et strictement positives quand n tend vers $+\infty$.

IV.B -

IV.B.1) Pour tout entier naturel n , on a $v_n = \frac{1}{b}(u_{n+1} - anu_n)$. On sait que les rayons associés aux suites (u_{n+1}) et (anu_n) ($a \neq 0$) sont encore ρ_S . On en déduit donc que $\rho_T \geq \rho_S$. De même, puisque pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{1}{c}(v_{n+1} - dnv_n)$, on a $\rho_S \geq \rho_T$. Finalement,

$$\rho_S = \rho_T.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2}}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}} \geq n\sqrt{\alpha(n)}$ et puisque $\sqrt{\alpha(n)}$ a une limite réelle strictement positive, on en déduit

que $\frac{\sqrt{u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2}}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2} z^n$ est donc

nul. Puisque $\sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$, le rayon R de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|)z^n$ est également nul. Maintenant, on sait que

R est supérieur ou égal au plus petit des rayons associés aux suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ respectivement égaux à ρ_S et ρ_T . On en déduit que

$$\rho_S = \rho_T = \text{Min}\{\rho_S, \rho_T\} \leq R = 0,$$

et donc

$$\rho_S = \rho_T = 0.$$

IV.B.2) L'égalité $\frac{v_n}{n!} = \frac{1}{b} \left((n+1) \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - an \frac{u_n}{n!} \right)$ montre que $\rho_H \geq \rho_G$ et de même l'égalité

$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{c} \left((n+1) \frac{v_{n+1}}{(n+1)!} - dn \frac{v_n}{n!} \right)$ montre que $\rho_G \geq \rho_H$. Finalement

$$\rho_G = \rho_H.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u'_n = \frac{u_n}{n!}$ et $v'_n = \frac{v_n}{n!}$. L'encadrement de la question IV.A-2) valable pour $n \geq 1$ s'écrit alors

$$\alpha(n) \leq \frac{(n+1)!^2(u_{n+1}'^2 + v_{n+1}'^2)}{n^2 \times n!^2(u_n'^2 + v_n'^2)} \leq \beta(n) \text{ ou encore } \frac{n}{n+1} \sqrt{\alpha(n)} \leq \frac{\sqrt{u_{n+1}'^2 + v_{n+1}'^2}}{\sqrt{u_n'^2 + v_n'^2}} \leq \frac{n}{n+1} \sqrt{\beta(n)}.$$

Les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent respectivement vers C et A . En particulier, le rayon de convergence ρ de la série entière associée à la suite $(\sqrt{u_n'^2 + v_n'^2})$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{A} = \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |b|\}}$. Puisque

$|u'_n| \leq \sqrt{u_n'^2 + v_n'^2}$ et $|v'_n| \leq \sqrt{u_n'^2 + v_n'^2}$, il en est de même de ρ_S et ρ_T .

$$\rho_G = \rho_H \geq \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |b|\}}.$$

IV.C - On suppose que la suite v ne s'annule pas. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$q_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)v_{n+1}} = \frac{anu_n + bv_n}{(n+1)(cu_n + dnv_n)} = \frac{an^2q_n v_n + bv_n}{(n+1)(cnq_n v_n + dnv_n)} = \frac{an^2q_n + b}{n(n+1)(cq_n + d)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{n+1} = \Phi_n(q_n) \text{ où } \Phi_n(z) = \frac{an^2z + b}{n(n+1)(cz + d)}.$$

IV.D - Algorithme en MAPLE.

```

q := proc(q1, epsilon)
local r, n;
n := 1;
q := q1;
r := (a*q+b)/(2*(c*q+d));
q;
while abs(r-q) > epsilon do
n := n+1;
q := r;
r := (a*n^2*q+b)/(n*(n+1)*(c*q+d));
q;
od;
end;

```

IV.E - Pour $|x| < \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}}$, on a

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - bv_n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} - ax \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - b \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{x^n}{n!} = G'(x) - axG'(x) - bH(x) \\ = (1 - ax)G'(x) - bH(x),$$

et de même

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - cu_n - dv_n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} \frac{x^n}{n!} - c \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} - d \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = H'(x) - cG(x) - dxH'(x) \\ = (1 - dx)H'(x) - cG(x).$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}} \right[, \begin{cases} (1 - ax)G'(x) = bH(x) \\ (1 - dx)H'(x) = cG(x) \end{cases} .$$

IV.F - En dérivant la relation $(1 - dx)H'(x) = cG(x)$, on obtient $(1 - dx)H''(x) - aG'(x) = bH'(x) = bc \frac{G(x)}{1 - dx}$ et donc

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}} \right[, (1 - ax)(1 - dx)G''(x) - a(1 - dx)G'(x) - bcG(x) = 0.$$

De même, en dérivant la relation $(1 - ax)G'(x) = bH(x)$, on obtient $(1 - ax)G''(x) - dH'(x) = cG'(x) = bc \frac{H(x)}{1 - ax}$ et donc

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}}, \frac{1}{\text{Max}\{|a|, |d|\}} \right[, (1 - ax)(1 - dx)H''(x) - d(1 - ax)H'(x) - bcH(x) = 0.$$

IV.G - Soit (E) l'équation différentielle $(1 - ax)(1 - dx)y'' - a(1 - dx)y' - bcy = 0$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. Le coefficient de X^n dans $(1 - aX)(1 - dX)P'' - a(1 - dX)P' - bcP$ est $(adn(n-1) + adn - bc)a_n$ ou encore $(adn^2 - bc)a_n$. Puisque $a_n \neq 0$, si P est solution de (E), on a nécessairement $adn^2 - bc = 0$ ou encore $\frac{bc}{ad} = n^2$.

Si (E) admet une solution polynomiale non nulle de degré $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{bc}{ad} = n^2$.

Réciproquement, supposons que $\frac{bc}{ad} = n^2$ pour un certain entier naturel n .

L'application $f : P \mapsto (1 - aX)(1 - dX)P'' - a(1 - dX)P' - bcP$ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le calcul précédent montre que l'image de tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ ou encore $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. f n'est donc pas surjectif et par suite, f est non injectif. Il existe donc un polynôme non nul de degré au plus n solution de (E). L'étude du sens direct montre alors que ce polynôme est de degré exactement n .

(E) admet une solution polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\frac{bc}{ad} = n^2$.