SESSION 2008

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES II. FILIERE PC

Question préliminaire

Puisque $\det(M) = e \neq 0$, M est inversible. De plus,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = eI_2.$$

Puisque $e \neq 0$, on en déduit que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{e}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_3$ et donc que

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

Partie I - Récurrences linéaires

I.A - Récurrences linéaires d'ordre 2

I.A.1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ -a_0x_n - a_1x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} X_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.}$$

I.A.2) $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 + a_1X + a_0$ et donc

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.}$$

I.A.3) a) Posons $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$$AQ = QD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda_1 x \\ t = \lambda_2 y \\ -a_0x - a_1z = \lambda_1 z \\ -a_0y - a_1t = \lambda_2 t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda_1 x \\ t = \lambda_2 y \\ (\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0)x = 0 \\ (\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0)y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda_1 x \\ t = \lambda_2 y \end{array}\right.$$

Les matrices Q telles que $AQ = QD$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda_1 x & \lambda_2 y \end{pmatrix}$. Le déterminant d'une telle matrice est $xy(\lambda_2 - \lambda_1)$. Puisque $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, ce déterminant est nul si et seulement si $xy = 0$. Par suite, Q est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

$$\boxed{\text{Les matrices } Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telles que } AQ = QD \text{ sont les matrices de la forme } \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda_1 x & \lambda_2 y \end{pmatrix},\ (x, y) \in (\mathbb{C}^*)^2.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A = QDQ^{-1}$ et donc $A^n = QD^nQ^{-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = Q \times \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n) \times Q^{-1}.}$$

I.A.4) a) On sait que $2\lambda = \text{Tr}(A) = -a_1$ et $\lambda_2 = \det(A) = a_0$. Donc

$$\boxed{a_1 = -2\lambda \text{ et } a_0 = \lambda^2.}$$

b) Posons $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
AQ = QT &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda x \\ t = x + \lambda y \\ -a_0x - a_1z = \lambda z \\ -a_0y - a_1t = z + \lambda t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda x \\ t = x + \lambda y \\ (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)x = 0 \\ a_0y + a_1(x + \lambda y) + \lambda x + \lambda(x + \lambda y) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda x \\ t = x + \lambda y \\ (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2)x = 0 \\ (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2)y + (-2\lambda + \lambda + \lambda)x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda x \\ t = x + \lambda y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les matrices Q telles que $AQ = QT$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & x + \lambda y \end{pmatrix}$. Le déterminant d'une telle matrice est x^2. Donc Q est inversible si et seulement si $x \neq 0$.

$$\boxed{\text{Les matrices } Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telles que } AQ = QT \text{ sont les matrices de la forme } \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & x + \lambda y \end{pmatrix},\ (x, y) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}).}$$

En particulier, pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = T$ et donc A est semblable à T.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $T = \lambda I_2 + E_{1,2}$. Déjà, on a $E_{1,2}^2 = 0$ et donc $\forall k \geq 2,\ E_{1,2}^k = 0$. Comme les matrices λI_2 et $E_{1,2}$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$T^n = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}E_{1,2} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Mais alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = Q\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}Q^{-1}.}$$

I.A.5) • Si A admet deux valeurs propres distinctes, A est semblable à une matrice diagonale d'après la question I.A.3). Dans ce cas, A est diagonalisable.
• Si A admet une valeur propre double, d'après la question I.A.4), A est semblable à la matrice T. T admet λ pour valeur propre double. Cependant, $\text{rg}(T - \lambda I_2) = 1 \neq 0$ ou encore $\dim(\text{Ker}(T - \lambda I_2) = 1 \neq 2$. La dimension du sous-espace propre associé à λ n'est donc pas l'ordre de multiplicité de λ ce qui montre que T n'est pas diagonalisable. Il en est de même de A.

I.A.6) Deux exemples numériques

a) Exemple 1 Ici, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$ puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $z^2 - 3z + 2 = 0$. On peut donc prendre $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ et on est dans la situation de la question I.A.3). On peut choisir $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $A = Q \times \text{diag}(1, 2) \times Q^{-1}$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
X_n = A^nX_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - 2^n)x_0 + (2^n - 1)x_1 \\ (2 - 2^{n+1})x_0 + (2^{n+1} - 1)x_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (2-2^n)x_0 + (2^n-1)x_1.}$$

b) Exemple 2 Ici, $a_0 = 4$, $a_1 = -4$ puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $z^2 - 4z + 4 = 0$. A admet donc une valeur propre double à savoir $\lambda = 2$ et on est dans la situation de la question I.A.4). On peut choisir $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $A = Q \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n = A^n X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1}x_1 \\ -n2^{n+1}x_0 + n+1)2^n x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1}x_1.}$$

I.B - Vers un ordre supérieur à petits pas

I.B.1) En développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 - X \end{vmatrix} = -(a_2 + X)X^2 + a_1(-X) - a_0 = -(X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0).$$

$$\boxed{\chi_A = -P.}$$

I.B.2) Soient $(x, y) \in (\mathcal{S}(\mathbb{C}))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$\Phi(\alpha x + \beta y)_n = \begin{pmatrix} \alpha x_n + \beta y_n \\ \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \\ \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = (\alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y))_n,$$

et donc $\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$. De plus, pour $x \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$,

$$\Phi(x) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\boxed{\Phi \text{ est linéaire et injective.}}$$

Soit Y l'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ tel que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La première composante de Y_1 n'est pas la deuxième composante de Y_0 et donc $\forall x \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$, $\Phi(x) \neq Y$. Y n'a pas d'antécédent par Φ et donc

$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective.}}$$

I.B.3) a) Soit $x \in \mathcal{R}_P$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ -a_0x_n - a_1x_{n+1} - a_2x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n.$$

Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

b) Soit $X \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n = A^nX_0$. Soit x l'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n est la première composante de X_n. On a déjà $\Phi(x) = X$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = AX_n$ et en particulier $x_{n+3} = -a_2x_{n+2} - a_1x_{n+1} - a_0x_n$. Par suite, $x \in \mathcal{R}_P$ et donc $X \in \Phi(\mathcal{R}_P)$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^3),\ (X \in \Phi(\mathcal{R}_P) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0.}$$

I.B.4) D'après la question précédente, $\Phi(\mathcal{R}_P)$ est l'ensemble des $(A^n X_0)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
Soit $X \in \Phi(\mathcal{R}_P)$. Pour tout entier naturel n,

$$X_n = A^n X_0 = A^n(x_0 e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3) = x_0 A^n e_1 + x_1 A^n e_2 + x_2 A^n(e_3).$$

Ainsi, $\Phi(\mathcal{R}_P)$ est l'ensemble des $x_0\,(A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}} + x_1\,(A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}} + (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire l'espace engendré par les suites $(A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question I.B.2), Φ est injective et donc Φ réalise un isomorphisme de $\mathcal{R}_P$ sur $\Phi(\mathcal{R}_P)$. En particulier, $\dim(\mathcal{R}_P) = \dim(\Phi(\mathcal{R}_P)) = \dim(\mathrm{Vect}((A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}})$. Vérifions alors que cette famille est une famille libre de $\Phi(\mathcal{R}_P)$.
Soit $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} x_0(A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}} + x_1(A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}} + x_2(A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}} = 0 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ A^n(x_0 e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3) = 0 \\ &\Rightarrow A^0(x_0 e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3) = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 = x_2 = 0, \end{aligned}$$

car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. On a montré que la famille $((A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

On en déduit que $\dim(\mathcal{R}_P) = \dim(\mathrm{Vect}((A^n e_1)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_2)_{n\in\mathbb{N}}, (A^n e_3)_{n\in\mathbb{N}}) = 3$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{R}_P) = 3.}$$

I.C - Des exemples (quasi) numériques

I.C.1) Exemple 1 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ puis d'après la question I.B.1),

$$\chi_A = -P = -(X-1)\left(X^2 - X + \frac{1}{2}\right) = -(X-1)\left(X - \frac{1+i}{2}\right)\left(X - \frac{1-i}{2}\right).$$

Mais alors A admet trois valeurs propres simples et donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

b) Prenons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ puis $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $X_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ puis $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ puis $X_5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$ puis $X_6 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{9}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $X_7 = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix}$. Il semblerait que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\det(Q) = 1 \times (-1) + 2 \times 0 = -1 \neq 0$. Donc Q est inversible. Ensuite, la formule $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)}{}^t\mathrm{com}(Q)$ fournit

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mais alors

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et finalement

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = T.$$

$$\boxed{Q^{-1}AQ = T.}$$

d) Un calcul par blocs fournit $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et enfin,

$$T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Puisque T^4 est une matrice diagonale, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $T^{4p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix}$ puis

$$T^{4p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \\ 0 & \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix},$$

puis

$$T^{4p+2} = T^{4p} \times T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \\ 0 & \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & 0 \end{pmatrix},$$

et enfin,

$$T^{4p+3} = T^{4p} \times T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \\ 0 & \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p & -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p \end{pmatrix}.$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $X_n = A^nX_0 = QT^nQ^{-1}X_n$ et donc

$$Y_n = Q^{-1}X_n = T^nQ^{-1}X_0 = T^nY_0.$$

Or, les quatre suites $(T^{4p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(T^{4p+1})_{p\in\mathbb{N}}$, $(T^{4p+2})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(T^{4p+3})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent toutes vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la suite $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis que la suite (Y_n) converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_0$.

Mais alors la suite $(X_n) = (QY_n)$ converge vers

$$\begin{aligned}
Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ -x_0 + 2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_2 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit aussi que

$$\boxed{\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } x_0 - 2x_1 + 2x_2.}$$

I.C.2) Exemple 2 a)

$$\chi_A = -(X^3 - 2X^2 + 2X - 1) = -(X-1)(X^2 - X + 1) = -(X-1)(X+j)(X+j^2) = -(X-1)(X+e^{i\pi/3})(X+e^{-i\pi/3}).$$

b) Il existe donc une matrice inversible Q telle que $A = Q \times \text{diag}(1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}) \times Q^{-1}$.

Soit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_= Q \times \text{diag}(1, e^{in\pi/3}, e^{-in\pi/3}) \times Q^{-1}X_0$. En ne considérant que la première composante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on voit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e^{in\pi/3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $e^{-in\pi/3})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc aussi des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $\mathcal{R}_P \subset \text{Vect}\left((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (\cos(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}},\ \sin(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Mais $\dim(\mathcal{R}_P) = 3$ et finalement

$$\boxed{\mathcal{R}_P = \text{Vect}\left((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (\cos(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}},\ \sin(n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}\right).}$$

En particulier, tout élément de $\mathcal{R}_P$ est 6-périodique.

I.C.3) Exemple 3

a) $P = X^3 - (\lambda + 2\mu)X^2 + (\lambda^2 + 2\lambda\mu)X - \lambda\mu^2$ et donc

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda\mu^2 & -\lambda^2 - 2\lambda\mu & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}.}$$

b) A admet μ pour valeur propre double. Mais

$$\dim(\text{Ker}(A - \mu I_3)) = 3 - \text{rg}(A - \mu I_3) = 3 - \text{rg}(T - \mu I_3) = 3 - 2 = 1,$$

car $T - I_3 = \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et car $\lambda - \mu \neq 0$. Ainsi, la dimension du sous-espace propre associé à μ n'est pas l'ordre de multiplicité de μ et donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{diag}(\lambda, \mu, \mu) = \lambda E_{1,1} + \mu E_{2,2} + \mu E_{3,3}$ et donc $\text{diag}(\lambda, \mu, \mu)E_{2,3} = E_{2,3}\text{diag}(\lambda, \mu, \mu) = \mu E_{2,3}$. La formule du binôme de Newton permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
T^n = (\text{diag}(\lambda, \mu, \mu) + E_{2,3})^n &= \text{diag}(\lambda^n, \mu^n, \mu^n) + n\text{diag}(\lambda^{n-1}, \mu^{n-1}, \mu^{n-1})E_{2,3} = \text{diag}(\lambda^n, \mu^n, \mu^n) + n\mu^{n-1}E_{2,3} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Maintenant, avec les notations de la question I.C.1), si la suite (X_n) converge (resp. converge vers 0) alors la suite $(Y_n) = (Q^{-1}X_n)$ converge (resp. converge vers 0) et si la suite (Y_n) converge (resp. converge vers 0), la suite $(X_n) = (QY_n)$ converge (resp. converge vers 0).
Ensuite, si la suite T^n converge (resp. converge vers 0), alors pour tout Y_0, la suite $(Y_n) = (T^nY_0)$ converge (resp. converge vers 0). Réciproquement, si pour tout Y_0, la suite $(Y_n) = (T^nY_0)$ converge (resp. converge vers 0), c'est en particulier le cas quand Y_0 est l'un des trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que les suites (λ^n), (μ^n) et $(n\mu^{n-1})$ convergent (resp. convergent vers 0) et donc que la suite (T^n) converge (resp. converge vers 0).

En résumé,

$$(\forall X_0 \in \mathbb{C}^3,\ (X_n) \text{ converge (resp. converge vers } 0)) \Leftrightarrow (T^n) \text{ converge (resp. converge vers } 0).$$

Maintenant, (T^n) converge (resp. converge vers 0) si et seulement si les trois suites (λ^n), (μ^n) et $(n\mu^{n-1})$ convergent (resp. convergent vers 0). Dans le premier cas, ceci équivaut à $\lambda \in]-1,1]$ et $\mu \in]-1,1[$ et dans le deuxième à $(\lambda,\mu) \in]-1,1[^2$.

- $(\forall X_0 \in \mathbb{C}^3,\ \lim_{n\to+\infty} X_n = 0) \Leftrightarrow (\lambda,\mu) \in]-1,1[^2$.
- $(\forall X_0 \in \mathbb{C}^3,\ (X_n) \text{ converge}) \Leftrightarrow (\lambda,\mu) \in]-1,1]\times]-1,1[$.

Partie II - De la récurrence linéaire en général

II.A - Résultats d'existence et d'unicité des solutions

II.A.1) $X_0 = P_0X_0$ et si pour $n \geq 0$, $X_n = P_nX_0$ alors $X_{n+1} = A_nX_n = A_nP_nX_0 = P_{n+1}X_0$. Ceci montre par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = P_nX_0.}$$

II.A.2) La question II.A.1) montre qu'une solution de $\mathcal{H}_a$ est nécessairement la suite $(P_na)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc montre l'unicité d'une solution de $\mathcal{H}_a$. Mais d'autre part la suite $(P_na)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $\mathcal{H}_a$ ce qui montre l'existence d'une solution de $\mathcal{H}_a$.

II.A.3) a) La suite nulle est solution de $\mathcal{H}$ et toute combinaison linéaire de solutions de $\mathcal{H}$ est encore solution de $\mathcal{H}$. Donc

$$\boxed{S \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}(\mathbb{C}^k).}$$

b) Ψ est clairement une application linéaire. Ensuite, si a est un élément donné de $\mathbb{C}^k$, la question II.A.2) montre qu'il existe un et un seul élément $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S tel que $\Psi((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a$. Ψ est donc un isomorphisme. On en déduit que $\dim(S) = \dim(\mathbb{C}^k) = k$.

$$\boxed{\dim(S) = k.}$$

c) Les k solutions considérées sont les antécédents des éléments de la base canonique de $\mathbb{C}^k$ par l'isomorphisme ψ. L'image réciproque d'une base par un isomorphisme est une base et donc ces k solutions constituent une base de S.

II.B - Etude d'un exemple

II.B.1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{0+1} & 0 \\ -h_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons $P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$P_{n+1} = A_nP_n = \begin{pmatrix} \dfrac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+2} & 0 \\ -h_n - \dfrac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+2} & 0 \\ -h_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}.}$$

II.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X_n = P_nX_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{n+1} \\ -h_nx_0 + y_0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{n+1} \\ -h_nx_0 + y_0 \end{pmatrix}.}$$

II.B.3) Ainsi, toute élément de S est une combinaison linéaire des deux suites $n \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ -h_n \end{pmatrix}$ et $n \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque S est de dimension 2, ces deux suites constituent une base de S.

II.B.4) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = +\infty$. Donc, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $x_0 = 0$.

II.C - Problème avec condition initiale au temps n_0

II.C.1)

a) Puisque les matrices A_p, $p \in [\![0, n_0 - 1]\!]$, sont inversibles,
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$X_{n_0+p} = A_{n_0+p-1}A_{n_0+p-2}\dots A_{n_0}X_{n_0} = A_{n_0+p-1}A_{n_0+p-2}\dots A_{n_0}A_{n_0-1}\dots A_0(A_{n_0-1}\dots A_0)^{-1}X_{n_0} = P_{n_0+p}(P_{n_0})^{-1}a.$$

De même, pour $p \in [\![1, n_0]\!]$,

$$a = X_{n_0} = A_{n_0-1}A_{n_0-2}\dots A_{n_0-p}X_{n_0-p} = A_{n_0-1}A_{n_0-2}\dots A_{n_0-p}A_{n_0-p-1}\dots A_0(A_{n_0-p-1}\dots A_0)^{-1}X_{n_0-p} = P_{n_0}(P_{n_0-p})^{-1}X_{n_0-p}$$

et donc $X_{n_0-p} = P_{n_0-p}(P_{n_0})^{-1}a$. En résumé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = P_n(P_{n_0})^{-1}a.}$$

b) La question précédente montre l'unicité d'une solution. Réciproquement, cette solution convient. Le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ admet une solution et une seule.

II.C.2) a) Supposons $A_0 = 0$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 0$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 0$. Le système $(\mathcal{H}_{1,e_1})$ n'a donc pas de solution et donc plus généralement le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut ne pas avoir de solution.

b) Supposons $A_0 = 0$. Prenons $n_0 = 1$ et $a = 0$. Toute suite X vérifiant X_0 quelconque et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 0$ est solution du système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ et donc plus généralement le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ peut avoir strictement plus d'une solution.

II.D - Equations avec second membre

II.D.1) Existence, unicité et calcul pratique

a) La relation de récurrence et la condition initiale déterminent X_n de manière unique pour $n \geq n_0$. D'autre part, pour $n < n_0$, la relation de récurrence s'écrit $X_n = A_n^{-1}(X_{n+1} - b)$ et de nouveau $X_0, X_1, \dots, X_{n_0-1}$ existent et sont uniquement déterminés.

b) Algorithme en MAPLE.

```
X : =proc(a,n0,n)
local i;
X :=a;
if n>n0 then
    for i=1 to n-n0+1 do
        X :=Ai*X+bi;
    od;
    else;
        if n<n0 then
            for i=1 to n0-n do
                X :=Ai∧(-1)*(X-bi);
            od;
        fi;
fi;
X;
end;
```

II.D.2) Soit $p \in \mathbb{N}$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$. Supposons que $\alpha_1 Z_p^1 + \alpha_2 Z_p^2 + \dots + \alpha_k Z_p^k = 0$. Alors, puisque $(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel, la suite $(\alpha_1 Z_n^1 + \alpha_2 Z_n^2 + \dots + \alpha_k Z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution du système $(\mathcal{H}_{p,0})$. Mais d'après la question II.C.1)b), ce système admet une solution et une seule à savoir la suite nulle. On en déduit que $\alpha_1 (Z_n^1)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha_2 (Z_n^2)_{n\in\mathbb{N}} + \dots + \alpha_k (Z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et donc que les α_i, $i \in [\![1, k]\!]$, sont tous nuls puisque la famille $\left((Z_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (Z_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (Z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre. On a montré que la famille $\left(Z_p^1, Z_p^2, \dots, Z_p^k\right)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^k$ et donc une base de $\mathbb{C}^k$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \left(Z_p^1, Z_p^2, \dots, Z_p^k\right) \text{ est une base de } \mathbb{C}^k.}$$

II.D.3) a) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la famille $\left(Z_n^1, Z_n^2, \dots, Z_n^k\right)$ est une base de $\mathbb{C}^k$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, il existe des complexes c_n^1, ..., c_n^k tels que

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} c_n^i Z_n^i = Z_n\,{}^t(c_n^1 \dots c_n^k).$$

b) Puisque chaque Z_n^i est solution du système homogène $(\mathcal{H})$, pour chaque i et chaque n, on a $Z_{n+1}^i = A_n Z_n^i$ et donc pour chaque n

$$A_n Z_n\,{}^t C_n = \sum_{i=1}^{n} c_n^i A_n Z_n^i = \sum_{i=1}^{n} c_n^i Z_{n+1}^i = Z_{n+1} C_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ solution de } \mathcal{G} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = A_n Y_n + b_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} C_{n+1} = A_n Z_n C_n + b_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} C_{n+1} = Z_{n+1} C_n + b_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n.\end{aligned}$$

II.E - Un exemple

II.E.1) D'après la question II.B.3), on peut prendre : $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\det(Z_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Z_n est donc inversible et $Z_n^{-1} = (n+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_n & \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ (n+1)h_n & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$Z_{n+1}^{-1} b_n = \begin{pmatrix} n+2 & 0 \\ (n+2)h_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+2} \\ -h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = C_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$

II.E.2) Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{n-1} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{1} \end{pmatrix} + C_0 = \begin{pmatrix} n \\ h_n \end{pmatrix} + C_0,$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Enfin, $C_0 = Z_0^{-1} Y_0 = I_2 Y_0 = Y_0$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \begin{pmatrix} n + x_0 \\ h_n + y_0 \end{pmatrix}.}$$

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = Z_n C_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n + x_0 \\ h_n + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} \\ -h_n x_0 + y_0 - (n-1)h_n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} \\ -h_n x_0 + y_0 - (n-1)h_n \end{pmatrix}.}$$

