SESSION 2007

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES II. FILIERE PSI

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Soient $(a,') \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Posons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$p\left(a\overrightarrow{u} + a'\overrightarrow{u'}\right) = \begin{pmatrix} (ax + a'x') - \alpha(az + a'z') \\ (ay + a'y') - \beta(az + a'z') \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix} + a'\begin{pmatrix} x' - \alpha z' \\ y' - \beta z' \end{pmatrix} = ap\left(\overrightarrow{u}\right) + a'p\left(\overrightarrow{u'}\right).$$

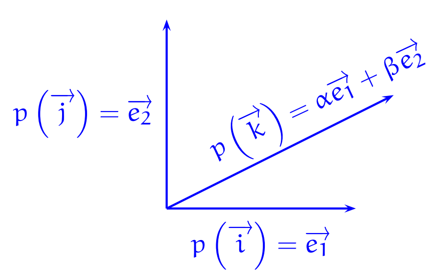
Donc $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Ensuite, puisque $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en notant respectivement $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, on a

$$\boxed{p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3, \mathscr{B}_2}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix}.}$$

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}p \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha z \\ y = \beta z \end{array}\right.$ et donc $\mathrm{Ker}p = \{(\alpha z, \beta z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v}\right)$ où $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ensuite, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(p)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ et donc $\mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}p = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v}\right) \text{ où } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2.}$$

I.A.2) On note $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



I.B - Interprétation géométrique de p

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\overline{p} \circ \overline{p}((x, y, z)) = \begin{pmatrix} (x - \alpha z) - \alpha 0 \\ (y - \beta z) - \beta 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{p}((x, y, z)).$$

Donc $\overline{p}$ est une projection. On a $\mathrm{Ker}(\overline{p}) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$. D'autre part, comme $\mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(\overline{p}) = \{(x, y, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$\overline{p}$ est donc la projection sur Vect $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ parallèlement à $\overrightarrow{v}$ puis

$$\boxed{p \text{ « est » la projection sur } \mathbb{R}^2 \text{ parallèlement à } \overrightarrow{v}.}$$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\|p(X)\|^2 - \|X\|^2 = (x - \alpha z)^2 + (y - \beta z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z^2 - 2(\alpha x + \beta y)z.$$

En particulier, pour $X = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2\beta}, 1\right)$, on a

$$\|p(X)\|^2 - \|X\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 1 - 2\left(\alpha(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}) + \beta(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2\beta})\right) = -1 - 2(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 1 > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\exists X \in \mathbb{R}^3 / \ \|p(X)\| > \|X\|.}$$

I.C -

I.C.1) Posons $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p\left(M_0 + \lambda\overrightarrow{u}\right) = \begin{pmatrix} (x_0 + \lambda a) - \alpha(z_0 + \lambda c) \\ (y_0 + \lambda b) - \beta(z_0 + \lambda c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \alpha z_0 \\ y_0 - \beta z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a - \alpha c \\ b - \beta c \end{pmatrix} = p(M_0) + \lambda p\left(\overrightarrow{u}\right).$$

Par suite,

$$p(D) = \{p\left(M_0 + \lambda\overrightarrow{u}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{p(M_0) + \lambda p\left(\overrightarrow{u}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = p(M_0) + \mathbb{R}p\left(\overrightarrow{u}\right).$$

$$\boxed{p(D) = p\left(M_0\right) + \mathbb{R}p\left(\overrightarrow{u}\right).}$$

I.C.2) Soient M_0 un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ puis D la droite $M_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

- Si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, $p\left(\overrightarrow{u}\right) = 0$ et donc $p(D) = \{p(M_0)\}$. Dans ce cas, $p(D)$ est réduite à un point.
- Si $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{v}$, $p\left(\overrightarrow{u}\right) \neq 0$ et dans ce cas, $p(D) = \{p(M_0)\} + \mathbb{R}p\left(\overrightarrow{u}\right)$ est la droite passant par $p(M_0)$ et dirigée par $p\left(\overrightarrow{u}\right)$.

$$\boxed{\text{L'image d'une droite affine par } p \text{ est soit une droite affine, soit réduite à un point.}}$$

I.C.3) a) Soient D et D' deux droites sécantes en un point A et respectivement dirigées par les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ tels que $p\left(\overrightarrow{u}\right) \neq 0$ et $p\left(\overrightarrow{u'}\right) \neq 0$.

Alors, $p(D)$ est la droite $p(A) + \mathbb{R}p\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $p(D')$ est la droite $p(A) + \mathbb{R}p\left(\overrightarrow{u'}\right)$. Les droites $p(D)$ et $p(D')$ sont donc sécantes en le point $p(A)$.

$$\boxed{\text{Si } D \text{ et } D' \text{ sont deux droites sécantes et si } p(D) \text{ et } p(D') \text{ sont des droites, alors } p(D) \text{ et } p(D') \text{ sont sécantes.}}$$

Soit D (resp. D') la droite passant par le point $A(0, 0, 1)$ (resp. $A'(0, 0, -1)$) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i}$ (resp. $\overrightarrow{j}$). D et D' ne sont pas coplanaires et donc ne sont pas sécantes.

Mais $p(D)$ (resp. $p(D')$) est dirigée par $p\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i}$ (resp. $p\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j}$). $p(D)$ et $p(D')$ sont donc deux droites sécantes de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, si $p(D)$ et $p(D')$ sont deux droites sécantes, D et D' ne sont pas nécessairement sécantes. La réciproque est fausse.

b) Soient D et D' deux droites parallèles. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de ces deux droites. Alors, $p(D)$ et $p(D')$ sont dirigées par le vecteur $p\left(\overrightarrow{u}\right)$ et sont donc parallèles.

$$\boxed{\text{Si } D \text{ et } D' \text{ sont parallèles et si } p(D) \text{ et } p(D') \text{ sont des droites, } p(D) \text{ et } p(D') \text{ sont parallèles.}}$$

Soient D une droite dirigée par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{v}$ et D' une droite dirigée par $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{i}$. $p(D)$ est une droite dirigée par $p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{i}$ et $p(D')$ est une droite dirigée par $p\left(\overrightarrow{u'}\right) = \overrightarrow{i}$. Donc $p(D)$ et $p(D')$ sont parallèles, mais D et D' ne le sont pas car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. La réciproque est fausse.

I.C.4) Soit Π un plan affine. On note $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ un repère de Π et $\overrightarrow{\pi}$ la direction de Π.

De même qu'en I.C.1),

$$p(\Pi) = \{p(A + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u'}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{p(A) + \lambda p\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu p\left(\overrightarrow{u'}\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = p(A) + \mathbb{R}\, p\left(\overrightarrow{u}\right) + \mathbb{R}\, p\left(\overrightarrow{u'}\right).$$

Ceci montre déjà que $p(\Pi)$ est un point, une droite ou le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier.

• On ne peut avoir $p\left(\overrightarrow{u}\right) = p\left(\overrightarrow{u'}\right) = 0$ car Ker(p) est de dimension 1 et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Donc $p(\Pi)$ est une droite ou le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier.

• Si $\overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{\Pi}$, alors $\overrightarrow{\Pi} \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$. Dans ce cas, la restriction de p à $\overrightarrow{\Pi}$ est injective. On en déduit que l'image par p de la famille libre $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et donc une base de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, $p(\Pi) = \mathbb{R}^2$.

• Si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\Pi}$, on peut choisir une nouvelle base de $\overrightarrow{\Pi}$ de la forme $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$. Dans ce cas, $p(\Pi) = p(A) + \mathbb{R}\, p\left(\overrightarrow{v}\right) + \mathbb{R}\, p\left(\overrightarrow{w}\right) = p(A) + \mathbb{R}\, p\left(\overrightarrow{w}\right)$ avec $p\left(\overrightarrow{w}\right) \neq 0$ et $p(\Pi)$ est une droite.

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\pi},\ p(\Pi) \text{ est une droite et si } \overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{\pi},\ p(\Pi) = \mathbb{R}^2.}$$

I.D - Une propriété métrique de p

I.D.1) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$q(X) = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x - \alpha z)^2 - (y - \beta z)^2 = (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2 + 2(\alpha x + \beta y)z = z((\alpha^2 + \beta^2 - 1)z - 2(\alpha x + \beta y)).$$

L'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(X) = 0$ est donc la réunion des plans Π_1 d'équation $z = 0$ et Π_2 d'équation $(\alpha^2 + \beta^2 - 1)z - 2(\alpha x + \beta y) = 0$ (Π_2 est effectivement un plan puisque par exemple $\alpha \neq 0$).

Soit Π un plan parallèle à Π_1 ou à Π_2. On a donc $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi_1}$ ou $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi_2}$.
On note alors que pour tous points M et M′ de $\mathbb{R}^3$, puisque p est linéaire, on a

$$\overrightarrow{p(M)p(M')} = p(M') - p(M) = p(M' - M) = p\left(\overrightarrow{MM'}\right).$$

Soient M et M′ deux points de Π. $\overrightarrow{MM'}$ est dans $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi_1}$ ou dans $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Pi_2}$ et donc

$$\left\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\right\| = \left\|p\left(\overrightarrow{MM'}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|,$$

par définition de Π_1 et Π_2.
Ainsi, pour tous points M et M′ de Π, $\left\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$. Le plan Π est donc représenté en vraie grandeur par p.

$$\boxed{\text{Les plans parallèles à } \Pi_1 \text{ ou } \Pi_2 \text{ sont représentés en vraie grandeur par } p.}$$

I.D.2) a) Pour $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $Q(X) = 2\alpha xz + 2\beta yz + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2$.

• **Existence.** Soit u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathscr{B}_3$ est orthonormée et que la matrice de u dans $\mathscr{B}_3$ est symétique, u est autoadjoint. De plus, pour $X = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$< X, u(X) >= {}^tX(AX) = a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz = 2\alpha xz + 2\beta yz + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z^2 = Q(X).$$

• **Unicité.** Soient u et u' deux endomorphismes autoadjoints tels que $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ q(X) =< u(X), X >=< u'(X), X >$. Posons $v = u' - u$. v est autoadjoint en tant que combinaison linéaire d'endomorphismes autoadjoints et vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ < v(X), X >= 0$.

Par polarisation, on a $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ < v(X), Y >= 0$. En effet,

$$0 = \frac{1}{2}(< v(X+Y), X+Y > - < v(X), X > - < v(Y), Y >) = \frac{1}{2}(< v(X), Y > + < v(Y), X >) =< v(X), Y >,$$

car v est autoadjoint.
Mais alors, $v\left(\overrightarrow{i}\right) \in (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})^{\perp} = \{0\}$ et donc $v\left(\overrightarrow{i}\right) = 0$. De même, $v\left(\overrightarrow{j}\right) = v\left(\overrightarrow{k}\right) = 0$. v s'annule ainsi sur une base de $\mathbb{R}^3$ et donc $v = 0$ ou encore $u = u'$.

$$\boxed{\exists! u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) / \ \forall X \in \mathbb{R}^3,\ Q(X) =< u(X), X >.}$$

b) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_u = \begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & -X & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\alpha^2-\beta^2-X \end{vmatrix} &= (-X)(X^2 - (1-\alpha^2-\beta^2)X - \beta^2) + \alpha(\alpha X) \\ &= -X(X^2 - (1-\alpha^2-\beta^2)X - \alpha^2 - \beta^2) = -X(X-1)(X-(-\alpha^2-\beta^2)).\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_u = -X(X-1)(X-(-\alpha^2-\beta^2)).}$$

Donc $\mathrm{Sp}(u) = (0, 1, -\alpha^2-\beta^2)$. u une valeur propre strictement positive, une valeur propre strictement négative et une valeur propre nulle.

I.E - Une généralisation

I.E.1) On choisit une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de P et d'après le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut la compléter en $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

I.E.2) Pour $(X,Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, posons $B_{q'}((X,Y)) =< u'(X), Y >$. $B_{q'}$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ (car u' est un endomorphisme autoadjoint) et vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ B_{q'}((X,X)) =< u'(X), X >= q'(X)$. On en déduit que q' est une forme quadratique et que $B_{q'}$ est sa forme polaire.

Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne$j$, $1 \leq i,j \leq 3$, de la matrice A' de u' dans $\mathscr{B}$, est $< u(e_j), e_i >$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée et que u' est autoadjoint, A' est une matrice symétrique.
On a déjà $a_{1,1} =< u'\left(\overrightarrow{e_1}\right), \overrightarrow{e_1} >= q'\left(\overrightarrow{e_1}\right) = 0$ et de même $a_{2,2} = 0$. Ensuite, le vecteur $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ est dans P et par polarisation on obtient

$$a_{1,2} = a_{2,1} =< u'\left(\overrightarrow{e_1}\right), \overrightarrow{e_2} >= B_{q'}((\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})) = \frac{1}{2}\left(q'\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) - q'\left(\overrightarrow{e_1}\right) - q'\left(\overrightarrow{e_1}\right)\right) = 0.$$

Finalement, la matrice de u' dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

I.E.3) Soit $X = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$q'(X) =< u'(X), X >= \sum_{1 \leq i,j \leq 3} x_i x_j < u\left(\overrightarrow{e_i}\right), \overrightarrow{e_j} >= 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 + cx_3^2 = x_3(2ax_1 + 2bx_2 + cx_3).$$

Par suite, l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q'(X) = 0$ est donc la réunion du plan d'équation $x_3 = 0$ c'est-à-dire le plan P et du plan d'équation $2ax_1 + 2bx_2 + cx_3 = 0$ (qui est bien un plan car $(a,b) \neq (0,0)$).

Déterminons les valeurs propres de u'.

$$\chi_{u'} = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 0 & -X & b \\ a & b & c-X \end{vmatrix} = (-X)(X^2 - cX - b^2) + a(aX) = -X(X^2 - cX - a^2 - b^2).$$

On a donc $\mathrm{Sp}(u') = (0, c - \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2}, c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4b^2})$.

Puisque $(a,b)\neq(0,0)$, $\sqrt{c^2+4a^2+4b^2}>\sqrt{c^2}=|c|\geq\pm c$ et donc $c+\sqrt{c^2+4a^2+4b^2}>0$ et $c-\sqrt{c^2+4a^2+4b^2}<0$.

$$\boxed{\text{Si } (a,b)\neq(0,0),\ u' \text{ admet une valeur propre strictement positive, une valeur propre strictement négative et une valeur propre nulle.}}$$

I.E.4) Puisque 0 est valeur propre de u', $\mathrm{rg}(u')\leq 2$.
• Si $(a,b)\neq(0,0)$, l'une des deux premières colonnes de A' et la dernière colonne ne sont pas colinéaires et donc $\mathrm{rg}(u')=2$.
• Si $(a,b)=(0,0)$ alors $\mathrm{rg}(u')=1$ si $c\neq 0$ et $\mathrm{rg}(u')=0$ si $c=0$.

$$\boxed{\text{Si } (a,b)\neq(0,0),\ \mathrm{rg}(u')=2 \text{ et si } (a,b)=(0,0),\ \mathrm{rg}(u')=1 \text{ si } c\neq 0 \text{ et } \mathrm{rg}(u')=0 \text{ si } c=0.}$$

Partie II - L'image d'une sphère

II.A - Une inéquation définissant le domaine $p(S)$
II.A.1) Posons $A=(x,y,0)$. On a $p(A)=\xi$. Soit alors $X\in\mathbb{R}^3$.

$X\in p^{-1}(\{\xi\})\Leftrightarrow p(X)=\xi\Leftrightarrow p(X)=p(A)\Leftrightarrow p(X-A)=0\Leftrightarrow X-A\in\mathrm{Ker}p\Leftrightarrow X-A\in\mathbb{R}\,\overrightarrow{v}\Leftrightarrow X\in A+\mathbb{R}\,\overrightarrow{v}\Leftrightarrow X\in D_\xi$.

$$\boxed{p^{-1}(\{\xi\})=D_\xi.}$$

Si $\xi\in p(S)$, il existe $a\in S$ tel que $p(a)=\xi$. Mais alors, $a\in p^{-1}(\{\xi\})=D_\xi$. Le point a est ainsi commun à S et D_ξ et donc $S\cap D_\xi\neq\varnothing$.
Si $S\cap D_\xi\neq\varnothing$, soit $a\in S\cap D_\xi$. Alors $a\in p-1(\xi)$ et donc $\xi=p(a)\in p(S)$.

$$\boxed{\forall\xi\in\mathbb{R}^2,\ (\xi\in p(S)\Leftrightarrow S\cap D_\xi\neq\varnothing).}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
S\cap D_\xi\neq\varnothing &\Leftrightarrow \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}X^2+Y^2+Z^2=R^2\\ X=x+t\cos\theta\\ Y=y+t\sin\theta\\ Z=z+t\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l}(x+t\cos\theta)^2+(y+t\sin\theta)^2+t^2-R^2=0\\ X=x+t\cos\theta\\ Y=y+t\sin\theta\\ Z=t\end{array}\right.\\
&\exists t\in\mathbb{R}/\ (x+t\cos\theta)^2+(y+t\sin\theta)^2+t^2-R^2=0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall\xi=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ (\xi\in p(S)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\ (x+t\cos\theta)^2+(y+t\sin\theta)^2+t^2-R^2=0).}$$

II.A.2) L'équation précédente s'écrit encore $2t^2+2(x\cos\theta+y\sin\theta)t+x^2+y^2-R^2=0$. Cette équation a au moins une solution réelle si et seulement si son discriminant réduit est positif ou nul. Or,

$$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow(x\cos\theta+y\sin\theta)^2-2(x^2+y^2-R^2)\geq 0\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)-(x\cos\theta+y\sin\theta)^2\leq 2R^2.$$

II.A.3) a) La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On sait alors que $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ ou encore que

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta+y\sin\theta\\ -x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{array}\right..}$$

b) Une rotation est une isométrie et donc $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Par suite,

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) - x'^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1.$$

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est l'ellipse d'équation } \frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1 \text{ dans } \mathscr{R}'.}$$

c) Avec les notations usuelles, $a = R\sqrt{2} > R = b$ et donc $\mathscr{E}$ est une ellipse d'axe focal (Ox') qui est encore la droite passant par O et d'angle polaire θ dans le repère $\mathscr{R}$.

Ensuite, $c^2 = a^2 - b^2 = R^2$ et donc $c = R$. Les foyers F et F' sont les points de coordonnées $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

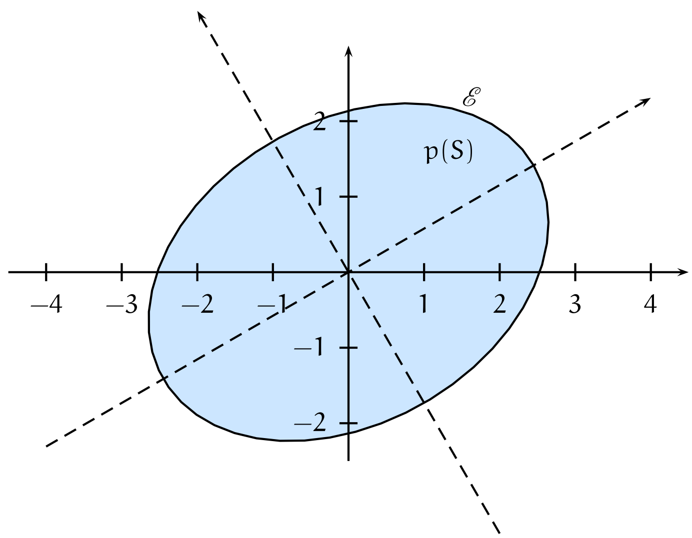
Enfin, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{R}{R\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{a = R\sqrt{2},\ b = R,\ c = R,\ e = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

d) $M \in p(S) \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 \leq 2R^2 \Leftrightarrow 2(x'^2 + y'^2) - x'^2 \leq 2R^2 \Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{2R^2} + \dfrac{y'^2}{R^2} \leq 1$. Donc

$$\boxed{p(S) \text{ est le domaine borné limité par } \mathscr{E}.}$$

Graphique dans le cas $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $R = 2$.



II.B - Etude du contour apparent de S

II.B.1) Soit $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Reprenons les calculs fait en II.A.1) et II.A.2). ξ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si le discriminant considéré est nul. Dans ce cas, l'équation d'inconnue t correspondante admet la solution double $t_0 = -\dfrac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)$.

Le point ξ admet alors un et un seul antécédent noté $\pi(\xi)$ et

$$\boxed{\forall \xi \in \mathscr{E},\ \pi(\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

II.B.2) Soit $\xi \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned}
< \pi(\xi), \overrightarrow{v} > &= \cos\theta\left(x - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)\cos\theta\right) + \sin\theta\left(y - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\theta\right) - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)\\
&= \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\sin\theta)(1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \xi \in \mathscr{E},\ < \pi(\xi), \overrightarrow{v} >= 0.}$$

II.B.3) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ tel que $< \overrightarrow{v}, X >= 0$. On a donc $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $x\cos\theta + y\sin\theta + z = 0$.

$$\begin{aligned}
\Phi(p(X)) &= 2\left((x - z\cos\theta)^2 + (y - z\sin\theta)^2\right) - ((x - z\cos\theta)\cos\theta + (y - z\sin\theta)\sin\theta)^2\\
&= 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(x\cos\theta + y\sin\theta)) - ((x\cos\theta + y\sin\theta) - z)^2\\
&2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(-z)) - (-z - z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2R^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi(p(X)) = 2R^2$ et donc $p(X) \in \mathscr{E}$. Finalement,

$$\boxed{\forall X \in S,\ X \in \Sigma \Leftrightarrow < \overrightarrow{v}, X >= 0.}$$

Ainsi, Σ est l'intersection de S et du plan passant par O de vecteur normal $\overrightarrow{v}$ et donc Σ un grand cercle de la sphère S. De plus, comme l'image par p de ce grand cercle est la « vraie » ellipse $\mathscr{E}$, la sphère S n'est pas représentée en vraie grandeur par p.

II.C - De certaines symétries vectorielles laissant stables $\mathscr{E}$

II.C.1) p_0 est une application linéaire de P_0 dans $\mathbb{R}^2$.
$\overrightarrow{v} \notin P_0$ et donc $\mathrm{Ker}(p_0) = \mathrm{Ker}(p) \cap P_0 = \{0\}$. On en déduit que p_0 est injective. Enfin, puisque $\dim(P_0) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$,

$$\boxed{p_0 \text{ est un isomorphisme de } P_0 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

II.C.2) a) s est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et

$$s^2 = p_0 \circ \sigma \circ p_1 \circ p_0 \circ \sigma \circ p_1 = p_0 \circ \sigma \circ \mathrm{Id}_{P_0} \circ \sigma \circ p_1 = p_0 \circ \sigma^2 \circ p_1 = p_0 \circ p_1 = \mathrm{Id}_{P_0}.$$

$$\boxed{s \text{ est une involution linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}}$$

b) $s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow p_0 \circ \sigma \circ p_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \sigma = p_0^{-1} \circ p_1^{-1} \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{Id}_{P_0}$ et de même, $s = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \sigma = -\mathrm{Id}_{P_0}$.
Excepté ces cas particuliers, σ admet deux droites propres à savoir les droites $D_1 = \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id}_{P_0})$ et $D_2 = \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id}_{P_0})$ et de même s admet deux droites propres à savoir les droites $\Delta_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\Delta_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \in \Delta_1 &\Leftrightarrow s\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow p_0 \circ \sigma \circ p_1\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}\\
&\Leftrightarrow \sigma\left(p_1\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = p_1\left(\overrightarrow{u}\right) \Leftrightarrow p_1\left(\overrightarrow{u}\right) \in D_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \in p_0(D_1).
\end{aligned}$$

Donc, $\Delta_1 = p_0(D_1)$ et de même, $\Delta_2 = p_0(D_2)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = p_0(\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id}_{P_0})) \text{ et } \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = p_0(\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id}_{P_0})).}$$

c) Σ est contenu dans P_0 et donc

$$\begin{aligned}
s(\Sigma) \subset \Sigma &\Leftrightarrow p_0(\sigma(p_1(\Sigma))) \subset \Sigma \Leftrightarrow \sigma(p_1(\Sigma)) \subset p_1(\Sigma)\\
&\Leftrightarrow \sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{E}.
\end{aligned}$$

Partie III - Balayage de $p(S)$ par des cercles

III.A - Question préliminaire

Pour $t \in I$, posons $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Pour $t_0 \in I$, on a

$$(p \circ \Gamma)'(t_0) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - \cos\theta z \\ y - \sin\theta z \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) - \cos\theta z'(t_0) \\ y'(t_0) - \sin\theta z'(t_0) \end{pmatrix} = p(\Gamma'(t_0)).$$

De plus, comme $\Gamma'(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{v}$, on a $(p \circ \Gamma)'(t_0) = p(\Gamma'(t_0)) \neq 0$. Le point $p \circ \gamma(t_0)$ est donc régulier.

$$\boxed{\text{Le point } p \circ \gamma(t_0) \text{ est régulier et la tangente en ce point est dirigée par } p(\Gamma'(t_0)).}$$

III.B -

III.B.1) Notons P_δ le plan d'équation $z = R\sin\delta$. La distance du centre O de S au plan P_δ est $R|\sin\delta|$ et est inférieure ou égale au rayon R de S. Donc $S \cap P_\delta$ est un cercle noté C_δ. Déterminons alors une paramétrisation de ce cercle.

Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$M \in S \cap P_\delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = R\sin\delta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 - R^2\sin^2\delta \\ z = R\sin\delta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2\cos^2\delta \\ z = R\sin\delta \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = R\cos\delta\cos\varphi \\ y = R\cos\delta\sin\varphi \\ z = R\sin\delta \end{array}\right.$$

Le centre de C_δ est le point $\Omega_\delta = (0, 0, R\sin\delta)$ et le rayon de C_δ est $r = \sqrt{R^2 - (R\sin\delta)^2} = \sqrt{R^2\cos^2\delta} = R\cos\delta$ (car $\cos\delta \geq 0$).

$$\boxed{\text{Le centre de } C_\delta \text{ est le point } \Omega_\delta = (0, 0, R\sin\delta) \text{ et le rayon de } C_\delta \text{ est } r = R\cos\delta.}$$

III.B.2) Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$M \in P_0 \cap C_\delta \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = R\cos\delta\cos\varphi \\ y = R\cos\delta\sin\varphi \\ z = R\sin\delta \\ x\cos\theta + y\sin\theta + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = R\cos\delta\cos\varphi \\ y = R\cos\delta\sin\varphi \\ z = R\sin\delta \\ \cos\delta\cos\varphi\cos\theta + \cos\delta\sin\varphi\sin\theta + \sin\delta = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} x = R\cos\delta\cos\varphi \\ y = R\cos\delta\sin\varphi \\ z = R\sin\delta \\ \cos\delta\cos(\varphi - \theta) + \sin\delta = 0 \ (E) \end{array}\right. .$$

Si $\delta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, l'équation (E) n'a pas de solution. Si $|\delta| < \dfrac{\pi}{2}$, l'équation (E) équivaut à $\cos(\varphi - \theta) = -\tan\delta$. Cette dernière équation d'inconnue φ a des solutions si et seulement si $-1 \leq -\tan\delta \leq$ ce qui équivaut à $|\delta| \leq \dfrac{\pi}{4}$.

En résumé, si $|\delta| > \dfrac{\pi}{4}$, l'équation (E) n'a pas de solution et $C_\delta \cap P_0 = \varnothing$.

Si $|\delta| \leq \dfrac{\pi}{4}$, l'équation (E) a au moins une solution (par exemple, $\varphi = \theta + \text{Arccos}(-\tan\delta)$) et pour cette valeur de φ, le point $\begin{pmatrix} R\cos\delta\cos\varphi \\ R\cos\delta\sin\varphi \\ R\sin\delta \end{pmatrix}$ appartient à $C_\delta \cap P_0$ de sorte de $P_0 \cap C_\delta \neq \varnothing$.

$$\boxed{\forall \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ P_0 \cap C_\delta \neq \varnothing \Leftrightarrow |\delta| \leq \frac{\pi}{4}.}$$

Plus précisément, quand $|\delta| < \dfrac{\pi}{4}$, l'équation (E) admet deux solutions modulo 2π (et donc $P_0 \cap C_\delta$ contient au plus deux points) à savoir $\varphi_1 = \theta + \text{Arccos}(-\tan\delta)$ et $\varphi_2 = \theta - \text{Arccos}(-\tan\delta)$. Ces solutions sont distinctes modulo 2π car

$$|\delta| < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\tan\delta \in]-1,1[\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\,\text{Arccos}(-\tan\delta) \in]0, 2\pi[.$$

Puisque $R\cos\delta \neq 0$, les points $M_\delta(\varphi_1)$ et $M_\delta(\varphi_2)$ sont distincts. $P_0 \cap C_\delta$ est donc constitué de exactement deux points.

III.B.3) $M_\delta(\varphi_0) \in P_0 \cap C_\delta \subset P_0 \cap S = \Sigma$. Donc $M_\delta(\varphi_0) \in \Sigma$.

• Les points O et $M_\delta(\varphi_0)$ sont dans P_0 et le vecteur $\overrightarrow{v}$ est normal à P_0. Donc, $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$.

• Ensuite,

$$< \overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}, \left[\frac{dM_\delta}{d\varphi}\right]_{\varphi=\varphi_0} >= (R\cos\delta\cos\varphi_0) \times (-R\cos\delta\sin\varphi_0) + (R\cos\delta\sin\varphi_0) \times (R\cos\delta\cos\varphi_0) + (R\sin\delta) \times 0 = 0,$$

Le vecteur $\left[\frac{dM_\delta}{d\varphi}\right]_{\varphi=\varphi_0}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$.

• Enfin, puisque Σ est un cercle de centre O d'après la question II.B.3) et que $M_\delta(\varphi_0) \in \Sigma$, tout vecteur tangent à Σ est orthogonal à $\overrightarrow{OM_\delta(\varphi_0)}$.

III.B.4) On a $S = \bigcup_{-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}} C_\delta$ et donc $p(S) = \bigcup_{-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}} p(C_\delta)$.

Pour $\delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donné, $p(C_\delta)$ est l'arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\delta + R\cos\delta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\delta + R\cos\delta\sin\varphi \end{pmatrix}$. On reconnaît le cercle de centre $\Omega_\delta = (-R\cos\theta\sin\delta, -R\sin\theta\sin\delta)$ et de rayon $R_\delta = R\cos\delta$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ p(C_\delta) \text{ est le cercle de centre } \Omega_\delta = (-R\cos\theta\sin\delta, -R\sin\theta\sin\delta) \text{ et de rayon } R_\delta = R\cos\delta. \\ p(S) \text{ est la réunion des } p(C_\delta),\ \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].\end{array}}$$

Supposons $|\delta| < \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, le cercle C_δ coupe le plan P_0 en deux points distincts $M_1 = M_\delta(\varphi_1)$ et $M_2 = M_\delta(\varphi_2)$. Les points M_1 et M_2 sont sur Σ et donc les points $p(M_1)$ et $p(M_2)$ sont sur $\mathscr{E}$. De plus, puisque M_1 et M_2 sont deux points distincts de P_0 et que la restriction de p à P_0 est injective,

les points $p(M_1)$ et $p(M_2)$ sont deux points distincts de $\mathscr{E}$.

Soit $i \in \{1, 2\}$. Notons $\overrightarrow{T}$ un vecteur directeur directeur de la tangente à Σ en M_i dans P_0 et $\overrightarrow{T'}$ un vecteur directeur directeur de la tangente à C_δ en M_i dans P_δ. Les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{T'}$ ne sont pas colinéaires à $\overrightarrow{v}$ et donc, d'après la question III.A -, ces vecteurs se projettent en des vecteurs $p\left(\overrightarrow{T}\right)$ et $p\left(\overrightarrow{T'}\right)$ non nuls dirigeant respectivement les tangentes à $p(M_i)$ à $\mathscr{E}$ et $p(C_\delta)$.

Maintenant, la question III.B.3) montre que les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{T'}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\overrightarrow{OM_i}$ et donc sont dans le plan $\pi = \overrightarrow{OM_i}^\perp$. Puisque le plan π contient $\overrightarrow{v}$, la question I.C.4) montre que $p(\pi)$ est une droite et en particulier, les vecteurs $p\left(\overrightarrow{T}\right)$ et $p\left(\overrightarrow{T'}\right)$ sont colinéaires ce qui montre que le cercle $p(C_\delta)$ et l'ellipse $\mathscr{E}$ sont tangents en M_i.

Le cas $|\delta| = \frac{\pi}{4}$ est identique à la nuance près que les points M_1 et M_2 sont confondus.

III.B.5) Soient δ et δ' deux réels tels que $0 \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{2}$.

La distance d entre les centres Ω_δ et $\Omega_{\delta'}$ de $p(C_\delta)$ et $p(C_{\delta'})$ est

$$d = \sqrt{R^2\cos^2\theta(\sin\delta' - \sin\delta)^2 + R^2\sin^2\theta(\sin\delta' - \sin\delta)^2} = R(\sin\delta' - \sin\delta).$$

On a d'une part

$$d = R\sin\delta' - R\sin\delta \leq R\sin\delta' + R\sin\delta < R\cos\delta' + R\cos\delta = R_\delta + R_{\delta'}.$$

D'autre part, $|R_\delta - R_{\delta'}| = R|\cos\delta - \cos\delta'| = R(\cos\delta - \cos\delta')$ par décroissance de la fonction cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis

$$\begin{aligned} d - |R_\delta - R_{\delta'}| &= R(\sin\delta' - \sin\delta) - R(\cos\delta - \cos\delta') = R(\sin\delta' + \cos\delta') - R\sin\delta + \cos\delta) \\ &= R\sqrt{2}\left(\sin\left(\delta' + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\delta + \frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

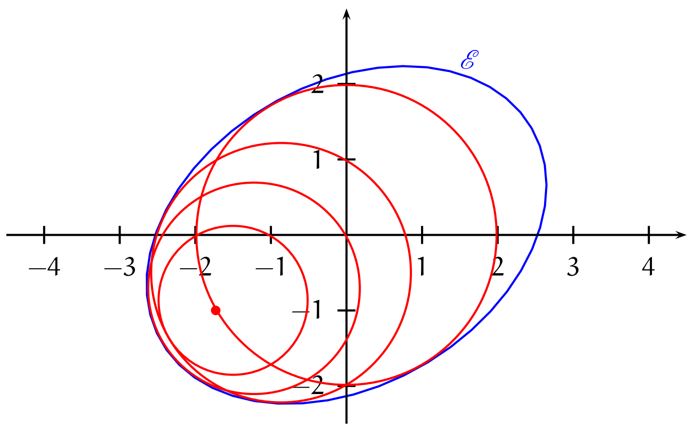
Mais alors,

• si $0 \le \delta < \delta' \le \dfrac{\pi}{4}$, on a $\dfrac{\pi}{4} \le \delta + \dfrac{\pi}{4} < \delta' + \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{2}$ et donc $d - |R_\delta - R_{\delta'}| > 0$ par stricte croissance de la fonction sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dans ce cas, on a $|R_\delta - R_{\delta'}| < \Omega_\delta\Omega_{\delta'} < R_\delta + R_{\delta'}$ et on sait que les cercles $p(C_\delta)$ et $p(C_{\delta'})$ sont sécants en deux points distincts,

• si $\dfrac{\pi}{4} \le \delta < \delta' \le \dfrac{\pi}{2}$, on a $\dfrac{\pi}{2} \le \delta + \dfrac{\pi}{4} < \delta' + \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{3\pi}{4}$ et donc $d - |R_\delta - R_{\delta'}| < 0$ par stricte décroissance de la fonction sin sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. Dans ce cas, on a $R_\delta - R_{\delta'} > \Omega_\delta\Omega_{\delta'}$ et on sait que le cercle $p(C_{\delta'})$ est intérieur au cercle $p(C_\delta)$.

III.C - La récompense finale

Les cercles tracés ci-dessous sont, du plus grand au plus petit : $p(C_0)$, $p(C_{\pi/6})$, $p(C_{\pi/4})$, $p(C_{\pi/3})$ et $p(C_{\pi/2})$ (qui est réduit à un point) et tout ceci dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $R = 2$.



III.D - On peut aussi découper la sphère S verticalement par des plans P_δ d'équation $x = R\sin\delta$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \delta \le \dfrac{\pi}{2}$.

