SESSION 2005

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I -

I.A -

I.A.1) Pour chaque $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, on a $N_\infty(A) = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leq i \leq n\}$ où $L_1, \ldots, L_n$ désignent les lignes de A. Donc

- $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ N_\infty(A) \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ N_\infty(A) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ L_i = 0 \Rightarrow A = 0$.
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$N_\infty(\lambda A) = \text{Max}\{\|\lambda L_i\|_1,\ 1 \leq i \leq n\} = \text{Max}\{|\lambda|\|L_i\|_1,\ 1 \leq i \leq n\} = |\lambda|\text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1 \leq i \leq n\} = |\lambda|N_\infty(A).$$

- Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$. Notons L_i, $1 \leq i \leq n$, et L'_i, $1 \leq i \leq n$, les lignes de A et B respectivement.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\|L_i + L'_i\|_1 \leq \|L_i\|_1 + \|L'_i\|_1 \leq N_\infty(A) + N_\infty(B),$$

et donc $N_\infty(A + B) = \text{Max}\{\|L_i + L'_i\|_1,\ 1 \leq i \leq n\} \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

Finalement

$$\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } M_n(\mathbb{C}).}$$

I.A.2) a) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $z = (z_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$|(Az)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \times |z_j| \leq \|z\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \|L_i\|_1 \|z\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty,$$

et donc

$$\|Az\|_\infty = \max\{|(Az)_i|,\ 1 \leq i \leq n\} \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty.$$

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall z \in \mathbb{C}^n,\ \|Az\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty.}$$

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après a), on a déjà $\sup\left\{\dfrac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_\infty},\ z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\} \leq N_\infty(A)$. On note alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ un indice i tel que $N_\infty(A) = \|L_{i_0}\|_1$. On note $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des complexes de module 1 tels que, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_j a_{i_0,j} = |a_{i_0,j}|$ (si $a_{i_0,j} \neq 0$ on prend $\varepsilon_j = \dfrac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}}$ et si $a_{i_0,j} = 0$, on prend $\varepsilon_j = 1$) puis on pose $z = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$. On a $\|z\|_\infty = 1$ et

$$|(A(z))_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1,$$

ce qui montre que $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \geq \dfrac{|(A(z))_{i_0}|}{\|z\|_\infty} = \|L_{i_0}\|_1$. Comme d'autre part, $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leq \|L_{i_0}\|_1$, on a donc

$$\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} = \|L_{i_0}\|_1 = N_\infty(A).$$

On a montré que $\sup\left\{\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty},\ z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}=\max\left\{\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty},\ z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}=N_\infty(A)$.

$$\boxed{\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\ N_\infty(A)=\max\left\{\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty},\ z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\right\}.}$$

c) Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=\rho(A)$ et z un vecteur propre de A associé à λ.

$$N_\infty(A)\geq\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}=\frac{\|\lambda z\|_\infty}{\|z\|_\infty}=|\lambda|=\rho(A).$$

$$\boxed{\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\ \rho(A)\leq N_\infty(A).}$$

I.A.3) Soit $(A,B)\in(M_n(\mathbb{C}))^2$. Pour $z\in\mathbb{C}^n$,

$$\|AB(z)\|_\infty\leq N_\infty(A)\|B(z)\|_\infty\leq N_\infty(A)N_\infty(B)\|z\|_\infty.$$

On en déduit que pour $z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$,

$$\frac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}\leq N_\infty(A)N_\infty(B),$$

et donc que $N_\infty(AB)\leq N_\infty(A)N_\infty(B)$.

$$\boxed{\forall(A,B)\in(M_n(\mathbb{C}))^2,\ N_\infty(AB)\leq N_\infty(A)N_\infty(B).}$$

I.A.4) a) Soit $Q\in GL_n(\mathbb{C})$.

- $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$, $N_Q(A)\geq 0$.
- $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$,

$$N_Q(A)=0\Rightarrow N_\infty(Q^{-1}AQ)=0\Rightarrow Q^{-1}AQ=0\Rightarrow A=0,$$

car Q et Q^{-1} sont inversibles et donc simplifiables.
- Pour $A\in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$N_Q(\lambda A)=N_\infty(Q^{-1}(\lambda A)Q)=|\lambda|N_\infty(Q^{-1}AQ)=|\lambda|N_Q(A).$$

- Pour $(A,B)\in(M_n(\mathbb{C}))^2$,

$$N_Q(A+B)=N_\infty(Q^{-1}AQ+Q^{-1}BQ)\leq N_\infty(Q^{-1}AQ)+N_\infty(Q^{-1}BQ)=N_Q(A)+N_Q(B).$$

- Pour $(A,B)\in(M_n(\mathbb{C}))^2$,

$$N_Q(AB)=N_\infty(Q^{-1}ABQ)=N_\infty(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ)\leq N_\infty(Q^{-1}AQ)N_\infty(Q^{-1}BQ)=N_Q(A)N_Q(B).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall Q\in Gl_n(\mathbb{C}),\ N_Q \text{ est une norme matricielle sur } GL_n(\mathbb{C}).}$$

b) Puisque $\dim_{\mathbb{C}}(M_n(\mathbb{C}))<+\infty$, N_∞ et N_Q sont équivalentes. On en déduit qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha N_\infty\leq N_Q\leq\beta N_\infty$. Soit $C_Q=\text{Max}\{\dfrac{1}{\alpha},\beta\}$. On a $\beta\leq C_Q$ puis $\dfrac{1}{\alpha}\leq C_Q$ et donc $\dfrac{1}{C_Q}\leq\alpha$. On a donc $\dfrac{1}{C_Q}N_\infty\leq N_Q\leq C_QN_\infty$.

$$\boxed{\forall Q\in GL_n(\mathbb{C}),\ \exists C_Q\in]0,+\infty[/\ \forall A\in M_n(\mathbb{C}),\ \frac{1}{C_Q}N_\infty(A)\leq N_Q(A)\leq C_QN_\infty(A).}$$

I.B - Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $T \in M_(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Pour $s > 0$,

$$D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} 1/s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/s^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & \dots & \dots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & & t_{2,n}s^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On a donc $\lim\limits_{\substack{s\to 0\\ s>0}} D_S^{-1}TD_S = D_{(t_{1,1},t_{2,2},\dots,t_{n,n})}$ et par continuité de N_∞,

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} N_{D_S}(T) = N_\infty(D_{(t_{1,1},t_{2,2},\dots,t_{n,n})}) = \max\{|t_{i,i}|,\ 1 \leq i \leq n\} = \rho(T).$$

Soit alors $A \in M_n(\mathbb{C})$. On sait que A est triangulable et donc il existe une matrice T triangulaire supérieure et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$. On choisit alors $s > 0$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$ et on pose $Q = PD_S$. On a

$$N_Q(A) = N_\infty((PD_S)^{-1}A(PD_S)) = N_{D_S}(P^{-1}AP) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon.$$

Maintenant, d'après I.A.4), N_Q est une norme matricielle et on a montré que

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe une norme matricielle } N_\varepsilon \text{ telle que } N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.}$$

I.C - Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

• Supposons que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$. Soient λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel k, on a $A^k x = \lambda^k x$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (\lambda^k x) = 0$. Puisque x n'est pas nul, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda^k = 0$ et donc que $|\lambda| < 1$. Ainsi, toute valeur propre de A est de module strictement inférieur à 1 et finalement $\rho(A) < 1$.

• Supposons que $\rho(A) < 1$. On choisit une norme matricielle N telle que $N(A) < \rho(A) + \dfrac{1-\rho(A)}{2} = \dfrac{1+\rho(A)}{2}$. Pour tout entier naturel k, on a

$$N(A^k) \leq (N(A))^k \leq \left(\frac{1+\rho(A)}{2}\right)^k,$$

et puisque $0 \leq \dfrac{1+\rho(A)}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} N(A^k) = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

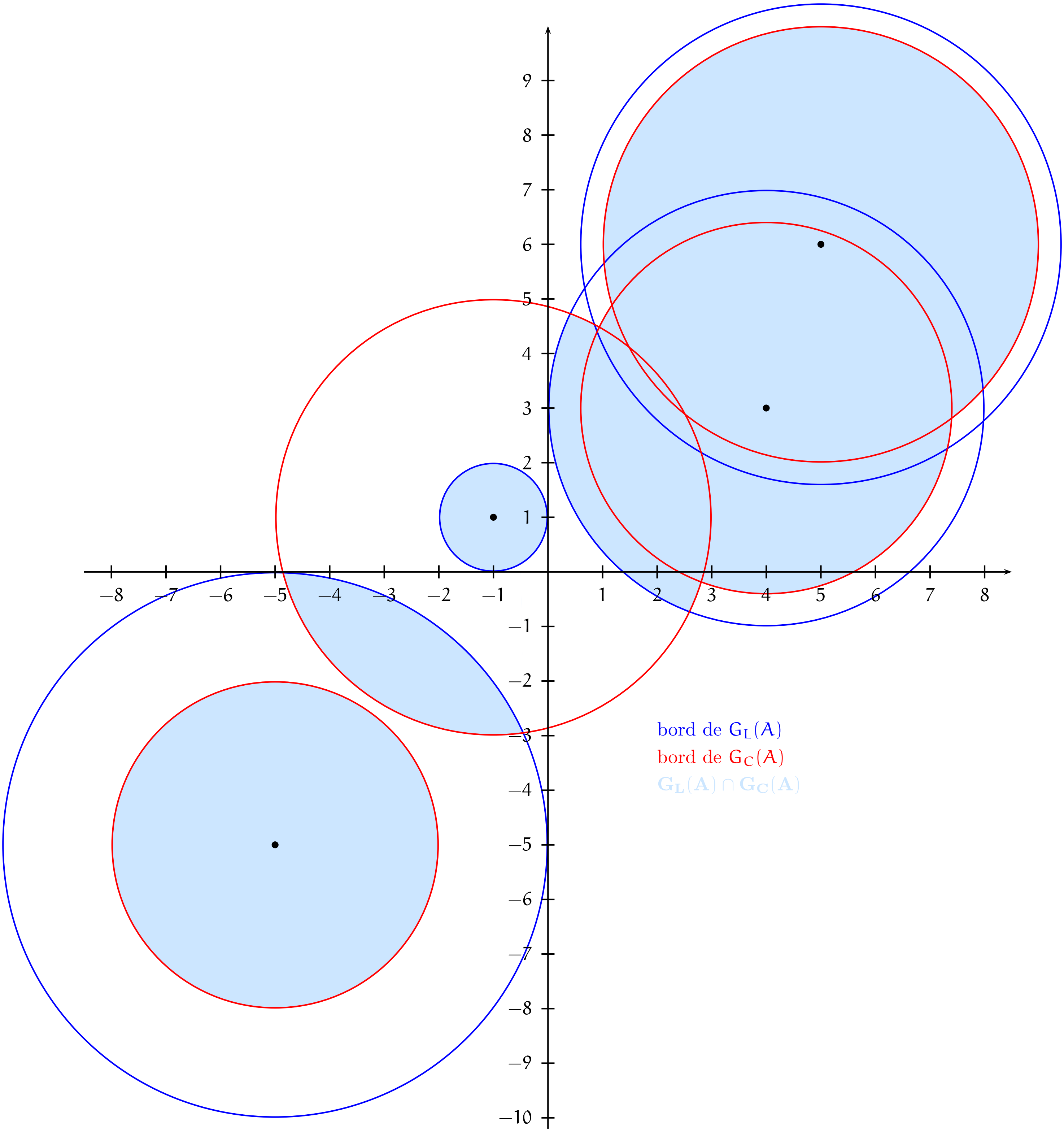
Finalement,

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ (\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1).}$$

Partie II -

II.A -

II.A.1) $G_L(A)$ est la réunion du disque de centre le point d'affixe $4 + 3i$ et de rayon $L_1 = 4$, du disque de centre le point d'affixe $-1 + i$ et de rayon $L_2 = 1$, du disque de centre le point d'affixe $5 + 6i$ et de rayon $L_3 = 3 + \sqrt{2}$ et du disque de centre le point d'affixe $-5 - 5i$ et de rayon $L_4 = 5$. $G_C(A)$ est la réunion du disque de centre le point d'affixe $4 + 3i$ et de rayon $C_1 = 2 + \sqrt{2}$, du disque de centre le point d'affixe $-1 + i$ et de rayon $C_2 = 4$, du disque de centre le point d'affixe $5 + 6i$ et de rayon $C_3 = 4$ et du disque de centre le point d'affixe $-5 - 5i$ et de rayon $C_4 = 3$.



I.A.2) a) Soit $Z = (z_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|z_p| = \|Z\|_\infty > 0$. Dans cette question, les L_i sont les $\sum_{j\neq i} |m_{i,j}|$.

$$MZ = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}z_j = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |m_{i,i}z_i| = \left|-\sum_{j\neq i} m_{i,j}z_j\right|$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |m_{i,i}| \times |z_i| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}||z_j| \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |m_{i,i}| \times |z_i| \leq L_i\|Z\|_\infty$$

$$\Rightarrow |m_{p,p}||z_p| \leq L_p\|Z\|_\infty \Rightarrow |m_{p,p}| \leq L_p \text{ (car } |z_p| = \|Z\|_\infty > 0).$$

Ainsi, s'il existe $Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $MZ = 0$ alors $\exists p \in [\![1, n]\!] / \ |m_{p,p}| \leq L_p$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \sigma(A)$. La matrice $M = A - \lambda I$ n'est pas inversible et donc il existe un vecteur non nul Z tel que $MZ = 0$. Mais alors d'après a), il existe un indice p tel que $|m_{p,p}| \leq \sum_{j \neq p} |m_{p,j}|$ ou encore tel que $|a_{p,p} - \lambda| \leq \sum_{j \neq p} |a_{p,j}|$. Cette dernière inégalité signifie que $\lambda \in D_p(A)$ et donc $\lambda \in G_L(A)$.

c) Ainsi, $\sigma_A \subset G_L(A)$. En appliquant ce résultat à ${}^tA$, on a aussi $\sigma_A = \sigma_{{}^tA} \subset G_L({}^tA) = G_C(A)$ et finalement

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A).}$$

II.A.3) a) On suppose que μ est une valeur propre de A située sur le bord de $G_L(A)$ et que x est un vecteur propre associé. On choisit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$. D'après le travail effectué en II.A.2), on a $|a_{k,k} - \mu| \leq L_k$. Mais comme μ est situé sur le bord de A, on a aussi $|a_{k,k} - \mu| \geq L_k$ et finalement $|a_{k,k} - \mu| = L_k$. Ceci montre que $\mu \in C_k(A)$.

b) Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ tel que $|x_i| < \|x\|_\infty = |x_k|$. Puisque $a_{k,i} \neq 0$, on a $|a_{k,i}||x_i| < |a_{k,i}||x_k|$ et donc

$$|a_{k,k} - \mu||x_k| = \left|\sum_{j \neq k} a_{k,j} x_j\right| < \sum_{j \neq k} |a_{k,j}||x_k| = L_k |x_k|.$$

Après simplification par le réel strictement positif $|x_k|$, on obtient $|a_{k,k} - \mu| < L_k$ ce qui n'est pas. Par suite, toutes les composantes de x ont même module et d'après a), $\mu \in \bigcap_{1 \leq j \leq n} C_j(A)$.

II.A.4) On a $D_p^{-1} A D_p = \left(\dfrac{p_j}{p_i} a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ et donc, $G_L(D_p^{-1} A D_p) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \left\{ z \in \mathbb{C} / \ |z - a_{i,i}| \leq \dfrac{1}{p_i} \sum_{j \neq i} p_j |a_{i,j}| \right\}$.

II.A.5) a) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ puis $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p > 0$. D'après I.A.2),

$$\rho(A) = \rho(D_p^{-1} A D_p) \leq N_\infty(D_p^{-1} A D_p) = \max \left\{ \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{i,j}|,\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Ainsi, $\rho(A)$ est un minorant de $\left\{ \max \left\{ \dfrac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{i,j}|,\ 1 \leq i \leq n \right\},\ p > 0 \right\}$ et donc

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \rho(A) \leq \inf \left\{ \max \left\{ \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{i,j}|,\ 1 \leq i \leq n \right\},\ p > 0 \right\}.}$$

b) i) Soit $p > 0$. Calculons la somme de tous les coefficients de la matrice $\left(\dfrac{p_i}{p_j} |a_{i,j}|\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$. Puisque pour $x > 0$, on a $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, on a encore $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq 3} |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} &= 7 + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_3}{p_1} + 16\frac{p_1}{p_2} + 7 + 8\frac{p_3}{p_2} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_2}{p_3} + 5 \\
&= 19 + 16\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}\right) + 8\left(\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_3}{p_1}\right) + 8\left(\frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_2}\right) \\
&\geq 19 + 2 \times (8 + 8 + 16) = 83.
\end{aligned}$$

Si maintenant on a pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$ $\dfrac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| < \dfrac{83}{3}$, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq 3} |a_{i,j}| \dfrac{p_j}{p_i} < 3 \times \dfrac{83}{3} = 83$ ce qui n'est pas. Donc, il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\dfrac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| \geq \dfrac{83}{3}$ ou encore, $\max \left\{ \dfrac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j a_{i,j},\ 1 \leq i \leq 3 \right\} \geq \dfrac{83}{3}$.

Cette minoration étant valable pour tout $p > 0$, on a montré que

$$\boxed{\inf\left\{\max\left\{\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{3} p_j a_{i,j},\ 1 \leq i \leq 3\right\},\ p > 0\right\} \geq \frac{83}{3}.}$$

ii) Déterminons le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 7-X & -16 & 8 \\ -16 & 7-X & -8 \\ 8 & -8 & -5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9-X & -16 & 8 \\ -9-X & 7-X & -8 \\ 0 & -8 & -5-X \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2)$$

$$= (-9-X)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & 7-X & -8 \\ 0 & -8 & -5-X \end{vmatrix} = (-9-X)\begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 0 & 23-X & -16 \\ 0 & -8 & -5-X \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= (-9-X)(X^2 - 18X - 243) = (-9-X)(X+9)(X-27) = -(X+9)^2(X-27).$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = (-9, -9, 27) \text{ et } \rho(A) = 27.}$$

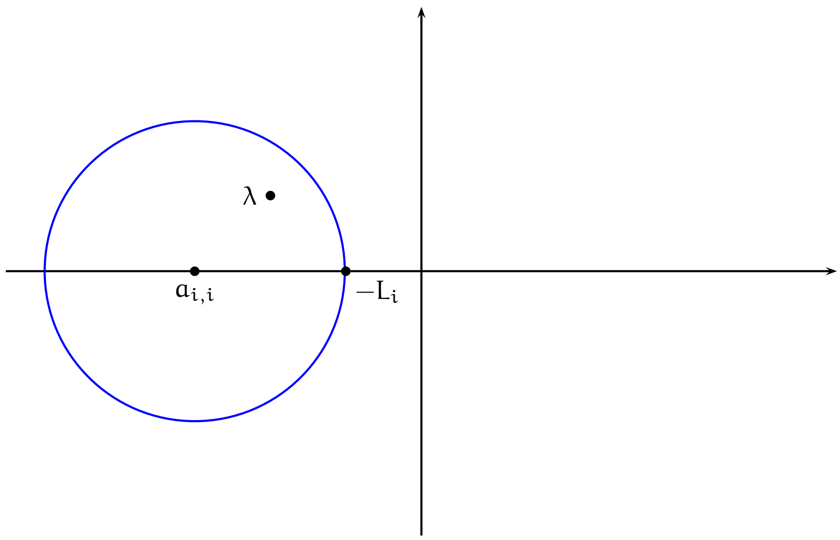
II.B - Applications

I.B.1) a) Si A est SDD, 0 n'est dans aucun des disques fermés de centre $a_{i,i}$ et de rayon L_i et donc 0 n'est pas dans σ_A d'après II.A.2). On en déduit que A est inversible.

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ A \text{ SDD} \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C}).}$$

b) Soit $\lambda \in \sigma_A$. Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{i,i} - \lambda| \leq L_i$. Mais alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\lambda) &= a_{i,i} + (\mathrm{Re}(\lambda) - a_{i,i}) \\ &\leq a_{i,i} + |\mathrm{Re}(\lambda) - a_{i,i}| = -|a_{i,i}| + |\mathrm{Re}(\lambda - a_{i,i})| \\ &\leq -|a_{i,i}| + |\lambda - a_{i,i}| \leq -|a_{i,i}| + L_i < 0. \end{aligned}$$



Ainsi, toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. En changeant A en $-A$, on obtient aussi : si A est SDD et si tous les $a_{i,i}$ sont des réels strictement positifs, alors toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement positives.

c) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle SDD. Pour $x = (x_i)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^n$, ${}^t xAx = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j$.

Si A est définie positive, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = Q((0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)) > 0$.

Réciproquement, les tous les $a_{i,i}$ sont des réels strictement positifs, d'après b), les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement positive et sont donc des réels strictement positifs (puisque A est symétrique réelle). On sait alors que A est définie positive.

En résumé, si A est une matrice symétrique réelle SDD, A est définie positive si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous des réels strictement positifs.

II.B.2) Puisque B est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_j)_{1\leq j\leq n}$ telle que $B = PDP^{-1}$. Soit alors $E' = PEP^{-1}$. Déjà, $B + E = P(D + E')P^{-1}$ et donc $\sigma_{B+E} = \sigma_{D+E'}$.

Soit $\widehat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+E'}$. Puisque les coefficients diagonaux de la matrice $D + E'$ sont les $\lambda_j + e'_{j,j}$ et les coefficients non diagonaux sont ceux de E', d'après la question II.A.2)b), il existe un indice i tel que

$$|\widehat{\lambda} - (\lambda_i + e'_{i,i})| \leq \sum_{j\neq i} |e'_{i,j}|.$$

Pour cet indice i, on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{\lambda} - \lambda_i| &\leq |\widehat{\lambda} - (\lambda_i + e'_{i,i})| + |e'_{i,i}| \\
&\leq |e'_{i,i}| + \sum_{j\neq i} |e'_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |e'_{i,j}| \\
&\leq N_\infty(E') = N_\infty(P^{-1}EP) \\
&\leq N_\infty(P)N_\infty(P^{-1})N_\infty(E) \text{ (d'après I.A.3)).}
\end{aligned}$$

Le réel $N_\infty(P)N_\infty(P^{-1})$ ne dépend que de B et on peut le noter $K_\infty(B)$. On a montré que

$$\boxed{\exists K_\infty(B) \in \mathbb{R}^+/\ \forall E \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall \widehat{\lambda} \in \sigma_{B+E},\ \exists \lambda_i \in \sigma_B/\ |\widehat{\lambda} - \lambda_i| \leq K_\infty(B)N_\infty(E).}$$

Partie III -

III.A - Préliminaire

III.A.1) Les fonctions c_j, $1 \leq j \leq n$, sont continues sur le segment $[0, 1]$. Il en est de même de la fonction $\sum_{j=1}^{n} |c_j|$. Cette fonction est en particulier bornée sur le segment $[0, 1]$. On note M un majorant de la fonction $\sum_{j=1}^{n} |c_j|$ sur $[0, 1]$.

Soient $t \in [0, 1]$ puis z une éventuelle racine de module supérieur ou égal à 1 de P_t dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
P_t(z) = 0 &\Rightarrow z^n = -\sum_{j=1}^{n} c_j(t)z^{n-j} \Rightarrow |z|^n \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j(t)||z|^{n-j} \\
&\Rightarrow |z|^n \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j(t)|\right) |z|^{n-1} \text{ (car } |z| \geq 1) \\
&\Rightarrow |z|^n \leq M|z|^{n-1} \\
&\Rightarrow |z| \leq M \text{ (car } |z| > 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$ et toute racine z de P_t dans $\mathbb{C}$, on a $|z| \leq 1$ ou $|z| \leq M$ et donc $|z| \leq \max\{1, M\}$. Ainsi, si on pose $R = \max\{1, M\}$, R est un réel strictement positif tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $Z_t \subset D(0, R)$.

$$\boxed{\exists R > 0/\ \forall t \in [0, 1],\ Z_t \subset D(0, R).}$$

III.A.2) Supposons par l'absurde que

$$\exists \varepsilon > 0/\ \forall \eta > 0,\ \exists t \in [0, 1]/\ |t - t_0| < \eta/\ \forall X_t \in Z_t,\ |X_t - X_0| \geq \varepsilon.$$

ε est dorénavant ainsi fixé. En particulier, pour chaque entier naturel non nul p, il existe $t_p \in [0,1]$ tel que $|t_p - t_0| \leq \dfrac{1}{p}$ et $\forall X_{t_p} \in Z_{t_p},\ |X_{t_p} - X_0| \geq \varepsilon$.

Déjà, puisque pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$ on a $|t_p - t_0| \leq \dfrac{1}{p}$, la suite $(t_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite t_0. Mais alors, puisque les c_j sont continues sur $[0,1]$, la suite $(P_{t_p}(X_0))_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{p\to+\infty} P_{t_p}(X_0) = X_0^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t_0)X_0^{n-j} = P_{t_0}(X_0) = 0 \ (1).$$

Posons alors $Z_{t_p} = (X_{1,t_p}, \dots, X_{n,t_p})$ (Z_{t_p} désignant maintenant la famille des racines de P_{t_p} numérotées arbitrairement). D'après III.A.1), la suite $(Z_{t_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de $\mathbb{C}^n$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(Z_{t_{\varphi(p)}})_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergente. Notons $(Y_1, \dots, Y_n)$ la limite de cette suite quand p tend vers $+\infty$. Puisque pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$ et chaque $j \in [\![1,n]\!]$, on a $|X_{j,t_{\varphi(p)}} - X_0| \geq \varepsilon$, quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|Y_j - X_0| \geq \varepsilon$ et en particulier, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $Y_j - X_0 \neq 0$.

Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{t_{\varphi(p)}} = (X - X_{1,\varphi(t_p)}) \dots (X - X_{n,\varphi(t_p)})$ et donc $P_{t_{\varphi(p)}}(X_0) = (X_0 - X_{1,\varphi(t_p)}) \dots (X_0 - X_{n,\varphi(t_p)})$. On en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty} P_{t_{\varphi(p)}}(X_0) = (X_0 - Y_1) \dots (X_0 - Y_n) \neq 0 \ (2).$$

(1) et (2) sont en contradiction et on a montré que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0/\ \forall t \in [0,1]\ (|t - t_0| < \eta \Rightarrow (\exists X_t \in Z_t/\ |X_t - X_{t_0}| < \varepsilon).}$$

III.B -

III.B.1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ admet 0 pour valeur propre double. Comme $D_1(A)$ est le disque de centre $(2,0)$ et de rayon 1, $D_1(A)$ ne contient aucune valeur propre de A.

III.B.2) a) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $t \in [0,1]$.

$$z \in G_L(A(t)) \Rightarrow \exists i \in [\![1,n]\!]/\ |a_{i,i} - z| \leq t \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \Rightarrow \exists i \in [\![1,n]\!]/\ |a_{i,i} - z| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \Rightarrow z \in G_L(A).$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ G_L(A(t)) \subset G_L(A).}$$

b) i) $a_{1,1}$ est le centre du disque $D_1(A)$ et est une valeur propre de $D = A(0)$. Donc, $a_{1,1} \in \sigma_{A(0)} \cap D_1(A)$ ou encore $0 \in E$.

$$\boxed{E \neq \varnothing.}$$

ii) Soit $t_0 \in E$. Il existe donc $\lambda_{t_0} \in \sigma_{A(t_0)} \cap D_1(A)$. Par hypothèse, λ_{t_0} n'est dans aucun des $D_j(A)$, $2 \leq j \leq n$. Soit d la distance de λ_{t_0} à $\bigcup_{j\neq i} D_j(A)$. d est un réel strictement positif car $\bigcup_{j\neq i} D_j(A)$ est un fermé et $\lambda_{t_0} \notin \bigcup_{j\neq i} D_j(A)$.

On peut donc poser $\varepsilon = \dfrac{d}{2} > 0$ et on applique le résultat de II.A.2) aux polynômes $P_t = (-1)^n \chi_{A(t)} = \det(XI_n - (D + tB))$ (P_t étant unitaire de degré n dont les coefficients sont des fonctions de t continues sur $[0,1]$) :

$$\exists \eta > 0/\ \forall t \in [0,1],\ (|t - t_0| < \eta \Rightarrow \exists \lambda_t \in \sigma(A(t))/\ |\lambda_t - \lambda_{t_0}| < \varepsilon.$$

Enfin, puisque $\varepsilon < d$, le réel λ_t fourni n'est pas dans $\bigcup_{j\neq i} D_j(A)$ mais est dans $\sigma_{A(t)}$ et donc dans $G_L(A(t))$ et donc dans $G_L(A)$ d'après a). Le réel λ_t fourni est ainsi dans $D_1(A)$. Ceci montre que $]t - \eta, t + \eta[\cap [0,1] \subset E$.

iii) Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$. Mais $D_1(A)$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$ et donc un compact de $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue. On peut ainsi extraire de la suite $(\lambda_{t_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite $(\lambda_{t_{\varphi(k)}})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un réel λ de $D_1(A)$.

Maintenant, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\chi_{A(t_{\varphi(k)})}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$ et quand k tend vers $+\infty$, on obtient par continuité du déterminant

$$\chi_{A(a)}(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} \left(\det(A(t_{\varphi(k)}) - \lambda_{t_{\varphi(k)}} I_n)\right) = 0$$

ce qui montre que $\lambda \in \sigma_{A(a)}$. Finalement, $\sigma_{A(a)} \cap D_1(A) \neq \varnothing$ et donc $a \in E$.

iv) ii) montre que E est une partie ouverte de $[0,1]$, iii) montre que E est une partie fermée de $[0,1]$ et i) montre que $E \neq \varnothing$. D'après le résultat admis par l'énoncé, $E = [0,1]$. En particulier, $1 \in E$ ou encore

$$\boxed{\sigma_A \cap D_1(A) \neq \varnothing.}$$

III.B.3) Le résultat précédent s'applique à chaque ligne et chaque colonne de la matrice A de la question II.A.1). Cette matrice a donc au moins une valeur propre dans le disque $D_2(A)$ de centre $(-1,1)$ et de rayon 1 et une valeur propre dans le disque $D'_4(A)$ de centre $(-5,-5)$ et de rayon 3. Enfin, II.A.3)b) montre que ces deux valeurs propres ne sont à l'intérieur de ces disques.

Partie IV -

IV.A -

IV.A.1) Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$. On pose $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\begin{aligned}
N_2(AB)^2 &= \sum_{1 \le i,j \le n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \\
&\le \sum_{1 \le i,j \le n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} |b_{l,j}|^2 \right) \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \sum_{1 \le i,j,k,l \le n} |a_{i,k}|^2 |b_{l,j}|^2 = \left(\sum_{1 \le i,k \le n} |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{1 \le l,j \le n} |b_{l,j}|^2 \right) \\
&= N_2(A)^2 N_2(B)^2,
\end{aligned}$$

et donc $N_2(AB) \le N_2(A) N_2(B)$. On a montré que

$$\boxed{N_2 \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbb{C}).}$$

IV.A.2) a) Posons $D = \operatorname{diag}(d_i)_{1 \le i \le n}$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_j)_{1 \le j \le p}$. Le coefficient ligne i, colonne j, $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$, de la matrice $D(A \times_H B)\Delta$ vaut $d_i a_{i,j} b_{i,j} \delta_j$. Ce coefficient est aussi celui des matrices $(DA\Delta) \times_H B$, $A \times_H (DB\Delta)$, $((DA) \times_H B)\Delta$, $D(A \times_H (B\Delta))$ et $(DA) \times_H (B\Delta)$.

b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne i, de la matrice $AD_x^t B$ vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j b_{i,j}$ ou encore $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} b_{i,j}) x_j$ et est aussi la i-ème composante du vecteur $(A \times_H B)x$.

c) Soient $x \in \mathbb{C}^p$ et $y \in \mathbb{C}^n$. Le coefficient ligne i, colonne i, de $D_y^* AD_x{}^t B$ vaut

$$y_i^* (AD_x{}^t B)_{i,i} = y_i^* [(A \times_H B)x]_i = \sum_{j=1}^{n} y_i^* a_{i,j} b_{i,j} x_j,$$

et donc

$$\operatorname{Tr}(D_y^* AD_x{}^t B) = \sum_{1 \le i,j \le n} y_i^* a_{i,j} b_{i,j} x_j = y^* (A \times_H B)x.$$

d) En supposant de plus que $n = p$, pour $x \in \mathbb{C}^n$ on a

$$x^* (A \times_H \overline{B})x = \operatorname{Tr}(D_x^* AD_x{}^t \overline{B}) = < D_x^* AD_x, B >.$$

IV.B -

IV.B.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in D_n^+(\mathbb{R})$ tel que $S = PD{}^tP$. On pose $\sqrt{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$ puis $T = \sqrt{D}{}^tP$. On a alors

$$ {}^tTT = P\sqrt{D}\sqrt{D}^t P = PD{}^tP = S. $$

$$\boxed{\forall S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ \exists T \in M_n(\mathbb{R})/\ S = {}^t TT.}$$

Si de plus, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(\det T)^2 = \det(S) > 0$ et donc $\det T \neq 0$ ou encore $T \in GL_n(\mathbb{R})$.

IV.B.2) Il est clair que $A \times_H B \in S_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, il existe $(T, U) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A = {}^tTT$ et $B = {}^tUU$. Pour $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a d'après IV.A.1)d),

$$
\begin{aligned}
{}^tx(A \times_H B)x &= < D_xAD_x, B >= \mathrm{Tr}(D_x{}^tTTD_x{}^tUU) = \mathrm{Tr}(UD_x{}^tTTD_x{}^tU) = \mathrm{Tr}({}^t(TD_x{}^tU)TD_x{}^tU) =< TD_x{}^tU, TD_x{}^tU > \\
&= N_2(TD_x{}^tU) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ceci montre que $A \times_H\ B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Si de plus, A et B sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, T et U sont inversibles et donc

$$ {}^tx(A \times_H B)x = 0 \Leftrightarrow N_2(TD_x{}^tU) \Leftrightarrow TD_x{}^tU = 0 \Leftrightarrow D_x = 0 \Leftrightarrow x = 0, $$

ce qui montre que $A \times_H\ B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2,\ A \times_H B \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (A, B) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ A \times_H B \in S_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

IV.B.3) a) Les valeurs propres de la matrice symétrique $B - \lambda_{min}(B)I_n$ sont les $\lambda - \lambda_{min}$, $\lambda \in \sigma_B$ et sont donc des réels positifs. On en déduit que $B - \lambda_{min}(B)I_n \in S_n^+(\mathbb{R})$. Mais alors, $A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

b) On a ${}^tx(A \times_H\ B)x = {}^tx(\lambda(A \times_H B)x) = \lambda(A \times_H B){}^txx = \lambda(A \times_H B)$ et donc

$$
\begin{aligned}
\lambda(A \times_H B) &= {}^tx(A \times_H\ B)x = {}^tx(A \times_H (B - \lambda_{min}I_n))x + \lambda_{min}(B){}^tx(A \times_H I_n)x \\
&= {}^tx(A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n))x + \lambda_{min}(B){}^tx\ \mathrm{diag}(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}x \\
&= {}^tx(A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n))x + \lambda_{min}(B)\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 \\
&\geq 0 + \lambda_{min}(B)\min_{1\leq i\leq n} a_{i,i}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ (car } B - \lambda_{min}(B)I_n \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ et aussi } \lambda_{min}(B) \geq 0) \\
&= \lambda_{min}(B)\min_{1\leq i\leq n} a_{i,i}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{min}(B)\min_{1\leq i\leq n} a_{i,i}.}$$

c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,i} = \min\limits_{1\leq j\leq n} a_{j,j}$. On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a

$$
\begin{aligned}
a_{i,i} &= {}^te_iAe_i = {}^te_i(A - \lambda_{min}(A)I_n)e_i + \lambda_{min}(A){}^te_ie_i = {}^te_i(A - \lambda_{min}(A)I_n)e_i + \lambda_{min}(A) \\
&\geq \lambda_{min}(A) \text{ (puisque } A - \lambda_{min}(A)I_n \in S_n^+(\mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

et donc $\min\limits_{1\leq j\leq n} a_{j,j} \geq \lambda_{min}(A)$. Puisque $\lambda_{min}(B) \geq 0$, d'après b) on a

$$\boxed{\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{min}(A)\lambda_{min}(B).}$$

d)

$$\begin{aligned}\lambda(A \times_H B) &= {}^t x(A \times_H (B - \lambda_{max} I_n))x + \lambda_{max}(B) {}^t x(A \times_H I_n)x \\ &\leq 0 + \lambda_{max}(B) \max_{1 \leq i \leq n} a_{i,i} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_{max}(B) \max_{1 \leq i \leq n} a_{i,i},\end{aligned}$$

et si i est un indice tel que $a_{i,i} = \max_{1 \leq j \leq n} a_{j,j}$

$$a_{i,i} = {}^t e_i A e_i = {}^t e_i (A - \lambda_{max}(A) I_n) e_i + \lambda_{max}(A) \leq \lambda_{max}(A).$$

$$\boxed{\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{max}(A) \lambda_{max}(B).}$$

