

# MATHÉMATIQUES II

*Nota : les trois parties du problème peuvent être abordées indépendamment.*

## Partie I - Propriétés de la transformée de Legendre

Dans toute la partie I - ,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction à valeurs réelles, définie sur  $I$ . On note  $J(f)$  l'ensemble des réels  $p$  tels que la fonction définie sur  $I$  par  $x \mapsto (px - f(x))$  soit majorée ; si  $J(f) \neq \emptyset$ , on définit la fonction  $g$  sur  $J(f)$  par :

$$\forall p \in J(f), g(p) = \sup_{x \in I} (px - f(x)) \quad .$$

La fonction  $g$  est appelée la transformée de Legendre de  $f$  ; on note  $g = \mathcal{L}(f)$ .

### I.A - Exemples

Calculer la transformée de Legendre  $g = \mathcal{L}(f)$  (en précisant l'ensemble  $J(f)$ ) et tracer le graphe de  $g$ , dans les cas suivants :

I.A.1)  $f(x) = kx^2$  ( $k \in \mathbb{R}_+^*$ ) ;  $I = \mathbb{R}$ .

I.A.2)  $f(x) = e^x$  ;  $I = \mathbb{R}$ .

I.A.3)  $f(x) = \arctan(x)$  ;  $I = \mathbb{R}$ .

### I.B - Etude générale

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que  $J(f)$  est non vide.

I.B.1) Montrer que  $J(f)$  est un intervalle : on montrera que, si  $a$  et  $b$  sont dans  $J(f)$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $ta + (1-t)b$  appartient à  $J(f)$ .

I.B.2) Montrer que  $g = \mathcal{L}(f)$  est convexe sur  $J(f)$ , c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in J(f) \times J(f), \forall t \in [0, 1], g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b) \quad .$$

I.B.3) Que peut-on dire de la monotonie de  $g = \mathcal{L}(f)$  dans les cas suivants :

a)  $I \subset \mathbb{R}^+$

b)  $I \subset \mathbb{R}^-$ .

### I.C - Étude d'un cas particulier

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $I$ , telle que :  $\forall x \in I, f''(x) > 0$ .

# Filière PC

On sait que  $f'(I)$  est un intervalle ; on note  $\alpha$  et  $\beta$  ses extrémités et l'on suppose  $\alpha < \beta$  (on peut avoir  $\alpha = -\infty$  ou  $\beta = +\infty$ ).

I.C.1) Montrer que  $J(f)$  contient l'intervalle ouvert  $] \alpha, \beta [$  et donner l'expression de  $g$  sur  $] \alpha, \beta [$  en fonction de  $f$  et  $f'^{-1}$  (fonction réciproque de la fonction  $f'$ ). Pour  $p \in ] \alpha, \beta [$ , on note  $x(p)$  l'unique point de  $I$  tel que :  $g(p) = px(p) - f(x(p))$ .

I.C.2) Pour  $p \in ] \alpha, \beta [$ , calculer  $g'(p)$  au moyen de  $x(p)$ .

I.C.3) Montrer que,  $\forall p \in ] \alpha, \beta [$ , la droite  $D_p$  d'équation  $y = px - g(p)$  est tangente au graphe de la fonction  $f$ .

I.C.4) Soit  $H = \{h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R} h''(x) > 0) \text{ et } h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$ . Montrer que:

a)  $\mathcal{L}(H) \subset H$ .

b)  $\forall h \in H, \mathcal{L}(\mathcal{L}(h)) = h$ .

c)  $\mathcal{L}$  est une bijection de  $H$  sur  $H$ .

## ***Partie II - Généralisation aux fonctions de plusieurs variables***

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $E$  désigne l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i ;$$

si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ , on note  $X$  le vecteur colonne associé  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Ainsi, si  $Y$  est le vecteur colonne associé à  $y \in E$ ,  $\langle x, y \rangle = {}^tXY$ .

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que, pour tout  $p \in E$ , l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$ , soit majorée ; on définit alors la transformée de Legendre de  $f$ , notée  $\mathcal{L}(f)$ , comme étant l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\mathcal{L}(f) : p \mapsto \sup_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x))$ .

Dans la suite de cette partie II,  $f$  est définie par  $f(x) = {}^tXAX$ , où  $A$  est une matrice carrée réelle d'ordre  $n$ , symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

II.1) Soit  $p \in E$  fixé. On pose  $F(x) = \langle p, x \rangle - f(x)$ .

Démontrer qu'il existe une base  $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  telle que :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ on a } F(x) = F_1(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (q_i y_i - \lambda_i y_i^2)$$

où les  $q_i$  et les  $\lambda_i$  sont des réels à déterminer.

Montrer que la fonction  $F$  est majorée sur  $E$  et atteint sa borne supérieure.

On en déduit en particulier que la transformée de Legendre de  $f$  est bien définie.

II.2) Calculer  $g = \mathcal{L}(f)$ , la transformée de Legendre de  $f$  et montrer qu'il existe une matrice carrée réelle symétrique  $B$ , d'ordre  $n$ , qu'on exprimera en fonction de  $A$  telle que

$$\forall p \in E, g(p) = {}^tPBP,$$

où  $P$  est le vecteur colonne associé à  $p$ .

Calculer la fonction  $h = \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$ .

II.3)

a) Montrer que  $\forall p \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tp) = t^2 f(p)$ ,

b) Montrer que :

$$\forall p \in E, \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = 2f(p).$$

*Indication* : on pourra calculer la dérivée de la fonction  $t \mapsto f(tp)$ .

II.4) En utilisant la question II.3-b), déterminer pour tout  $p \in E$ , un vecteur  $x(p) \in E$  tel que  $g(p) = f(x(p))$ .

*Indication* : on pourra utiliser  $\xi \in E$  tel que  $(grad F)(\xi) = 0$ .

### Partie III - Problème d'optimisation

$E$  désigne l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) muni du produit scalaire canonique, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée, notée  $\| \cdot \|$ . Si  $x \in E$ , on note  $X$  le vecteur colonne associé et par extension  $\|X\| = \|x\| = \sqrt{{}^tXX}$ .

Soit  $p$  un vecteur donné de  $E$ ,  $A$  une matrice carrée réelle d'ordre  $n$ , symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

On note  $F$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$F(x) = \langle p, x \rangle - {}^t X A X = {}^t P X - {}^t X A X.$$

Une partie  $C$  de  $E$  est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in C.$$

Soit  $C$  une partie fermée, non vide, convexe, de  $E$ .

Lorsque  $F$  est majorée sur  $C$ , on s'intéresse à  $M$ , ensemble — éventuellement vide — des points de  $C$  où l'application  $F$  restreinte à  $C$  atteint sa borne supérieure :

$$M = \{x \in C \mid F(x) = \sup_{y \in C} F(y)\}.$$

### III.A - Convexité de $M$

III.A.1) Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $C$  et pour  $t \in [0, 1]$ ,  $x = tx_1 + (1-t)x_2$ .

Montrer que :  $F(x) = (1-t)F(x_2) + tF(x_1) + t(1-t) {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)$ .

III.A.2) On suppose  $M$  non vide. Montrer que  $M$  est convexe.

### III.B - Cas particulier.

Dans cette seule question III.B, on suppose de plus que toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives.

III.B.1) Démontrer qu'il existe un nombre  $k > 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad {}^t X A X \geq k {}^t X X.$$

III.B.2) Montrer que  $M$  est non vide.

III.B.3) Montrer que  $M$  ne contient qu'un élément.

### III.C - Une caractérisation des points de $M$

III.C.1) Avec les mêmes notations qu'au III.A.1, montrer que :

$$F(x) - F(x_2) = -t^2 \cdot {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + t \cdot {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2).$$

III.C.2) Montrer l'équivalence :

$$x \in M \Leftrightarrow \left( x \in C \text{ et } \forall y \in C, {}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0 \right).$$

Donner l'interprétation de la caractérisation trouvée au moyen du gradient de  $F$  au point  $x$ .

### III.D - Cas où $C$ est borné

Dans cette question III.D, on suppose de plus que l'ensemble  $C$  est borné, contenu dans la boule fermée de centre  $O$  et rayon  $R$ .

III.D.1) Démontrer que  $M$  est non vide.

Trouver un exemple avec  $F$  non identiquement nulle où  $M$  a une infinité d'éléments.

III.D.2) Démontrer qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :  $\forall x \in E, \quad \|AX\| \leq \alpha \|X\|$ .

III.D.3) Soit  $r$  un nombre réel strictement positif tel que :

$$r > \sup\{6\alpha R^2, 2R(\|P\| + 2\alpha R)\}$$

(où  $\alpha$  est défini au III.D.2).

On se propose de construire par récurrence des suites  $(u_m)$ ,  $(v_m)$  de points de  $C$  et une suite réelle  $(t_m)$  telles que si  $U_m$  (resp.  $V_m$ ) est le vecteur colonne associé à  $u_m$  (resp.  $v_m$ ), on a pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

i)  $\forall x \in C, \quad {}^t(2AU_m - P)V_m \leq {}^t(2AU_m - P)X$  ;

ii)  $t_m = \frac{1}{r} {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m)$  ;

iii)  $u_{m+1} = u_m + t_m(v_m - u_m)$ .

On suppose donné  $m \in \mathbb{N}$  et  $u_m \in C$ .

a) Montrer l'existence de  $v_m \in C$  vérifiant la relation i).

b) Montrer que  $t_m$  défini par la relation ii) est dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

c) Montrer que  $u_{m+1}$  défini par la relation iii) est dans  $C$ .

Déduire des questions a), b) et c) que pour tout  $u_0 \in C$ , les relations i), ii) et iii) permettent de définir les suites  $(u_m)$ ,  $(v_m)$  et  $(t_m)$ .

III.D.4) Montrer que, si  $(u_m)$  est la suite définie à la question III.D.3), la suite  $(F(u_m))$  est croissante et convergente.

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite  $(u_m)$  qui converge vers un élément de  $M$ .

---

••• FIN •••

---