

EXERCICE 1

Un jeu de pile ou face

Préliminaires

Q1. La fonction f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $] -1, 1[$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

• Le résultat est vrai quand $k = 0$.

• Soit $k \geq 0$. Supposons que pour tout $x \in] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. Alors, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = k! \times \frac{(-1)(-(k+1))}{(1-x)^{(k+1)+1}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Q2. La fonction f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que les dérivées successives de f sur $] -1, 1[$ s'obtiennent par dérivation terme à terme. Donc, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} &= f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)^{(k)} = (x^k)^{(k)} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} (x^n)^{(k)} \\ &= k! + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k} = k! + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}. \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $k = 0$. On a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Etude d'un jeu de Pile ou Face

Q3. On sait que X suit la loi géométrique de paramètre p :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ puis pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on sait que $X = n$, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$. $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = k\} \cap \{X = n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n).$$

Q6.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = 0 | X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(-p) ((1-p)^2)^{n-1} = p(1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \quad (\text{car } (1-p)^2 \in]-1, 1[) \\ &= \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

Q7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} ((1-p)^2)^{n-k} \\ &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \times \frac{k!}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} \quad (\text{car } (1-p)^2 \in]-1, 1[\text{ et d'après la question Q2.}) \\ &= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(2p-p^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Une caractérisation de la fonction Gamma

Existence : la fonction Γ vérifie (S)

Q8. Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Etude en 0. $f(t) = t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$. Puisque $x > -1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite. Il en est de même de la fonction f .

Etude en $+\infty$. $t^2 f(t) = t^{x+1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Puisque $2 > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f .

Finalement, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $\Gamma(x)$ existe dans \mathbb{R} . On a montré que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $x > 0$. $\Gamma(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$. Donc, $\Gamma(x) > 0$.

Q9. Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Au vu de la convergence de chaque terme, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [t^x (-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

Q10. Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in]0, 1]$. La fonction $u \mapsto t^u$ (exponentielle de base t) est décroissante sur $[a, b]$ et donc

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} = \varphi(t).$$

Soit $t \in]1, +\infty[$. La fonction $u \mapsto t^u$ est croissante sur $[a, b]$ et donc $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t} = \varphi(t)$.

On a montré que pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $t^{x-1}e^{-t} \leq \varphi(t)$.

Q11. Soit $k \in \{0, 1, 2\}$. La fonction ψ_k est continue sur $]0, +\infty[$.

Etude en 0. $t^{1-\frac{k}{2}}\psi_k(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^{\frac{k}{2}} |\ln(t)|^k \underset{t \rightarrow 0}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, $\psi_k(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^{-1+\frac{k}{2}})$. Puisque $-1 + \frac{k}{2} > -1$, on en déduit que la fonction ψ_k est intégrable sur un voisinage de 0.

Etude en $+\infty$. $t^2\psi_k(t) = |\ln(t)|^k t^{b+1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(t^{b+k+1} e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ d'après deux théorèmes de croissances comparées. Par suite, $\psi_k(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ceci montre que la fonction ψ_k est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

On a finalement montré que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, la fonction ψ_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q12. Posons $\Phi : \begin{matrix} [a, b] \times]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & t^{x-1} e^{-t} \end{matrix}$ de sorte que pour tout $x \in [a, b]$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(x, t) dt$.

- Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I d'après la question **Q13**.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est de classe C^2 sur $[a, b]$ et de plus, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t}.$$

Ensuite, pour tout $k \in \{1, 2\}$, pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t) \right| = |\ln(t)|^k t^{x-1} e^{-t} \leq |\ln(t)|^k \varphi(t) = \psi_k(t)$. La fonction ψ_1 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \psi_2(t)$ où ψ_2 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction Γ est de classe C^2 sur $[a, b]$ et ses dérivées d'ordre 1 et 2 s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < 1 < b$, on a montré que la fonction Γ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Q13. • Soit $(u, v) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^2$. La fonction uv est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$ et donc $\langle u, v \rangle$ existe dans \mathbb{R} . Ceci montre que \langle , \rangle est une application de $(\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^2$ dans \mathbb{R} .

- Soit $(u, v) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^2$.

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)u(t) dt = \langle v, u \rangle.$$

Donc, \langle , \rangle est symétrique.

- Soient $(u_1, u_2, v) \in (\mathcal{C}^0([\alpha, \beta]))^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda u_1(t) + \mu u_2(t))v(t) dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} u_1(t)v(t) dt + \mu \int_{\alpha}^{\beta} u_2(t)v(t) dt = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle.$$

Donc, \langle , \rangle est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

- Soit $u \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$. Par positivité de l'intégration, $\langle u, u \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} (u(t))^2 dt \geq 0$.

Donc, \langle , \rangle est positive.

- Soit $u \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^1 (u(t))^2 dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [\alpha, \beta], (u(t))^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow u = 0. \end{aligned}$$

Donc, \langle , \rangle est définie.

En résumé, \langle , \rangle est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$ et donc \langle , \rangle est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

Q14. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln(t)t^{x-1}e^{-t} dt \right)^2 &= \left(\int_{\alpha}^{\beta} t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \times \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 dt \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left(\ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 dt \right) \\ &= \left(\int_{\alpha}^{\beta} t^{x-1}e^{-t} dt \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} dt \right). \end{aligned}$$

Quand α tend vers 0 et β tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} dt \right)$$

ou encore

$$\forall x > 0, (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

La fonction Γ est de classe C^2 et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction $g = \ln \circ f$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ puis

$$g''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0.$$

Ceci montre que la fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur $]0, +\infty[$. D'autre part, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et enfin, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. La fonction Γ vérifie donc (S).

Unicité

Q15. Soit $x > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)$.

- l'égalité est vraie quand $n = 1$ car f vérifie (S).
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x)$.
Alors $f(x+n+1) = (x+n)f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)f(x)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) = 1 \times 2 \times \dots \times n \times f(1) = n!$ (ce qui reste vrai quand $n = 0$)

$$\text{puis } g(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

Q16. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n+1) = x(x+1)\dots(x+n)f(x)$. En prenant le logarithme des deux membres de cette égalité, on obtient

$$g(x+n+1) = \ln(x(x+1)\dots(x+n)f(x)) = \ln(f(x)) + \ln(x(x+1)\dots(x+n)) = g(x) + \ln(x(x+1)\dots(x+n)).$$

Q17. Soit $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque g est convexe sur $]0, +\infty[$, la fonction $T : t \mapsto \frac{g(t) - g(n+1)}{t - (n+1)}$ est croissante sur $]0, +\infty[\setminus\{n+1\}$. En particulier, puisque $x + n + 1 \leq n + 2$, $T(x + n + 1) \leq T(n + 2)$, ce qui fournit

$$\frac{g(x + n + 1) - g(n + 1)}{x} \leq g(n + 2) - g(n + 1).$$

De même, $x + n + 1 \geq n$ et donc $T(x + n + 1) \geq T(n)$ ce qui fournit

$$\frac{g(x + n + 1) - g(n + 1)}{x} \geq \frac{g(n) - g(n + 1)}{n - (n + 1)} = g(n + 1) - g(n).$$

On a montré que : $\forall x \in]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n + 1) - g(n) \leq \frac{g(x + n + 1) - g(n + 1)}{x} \leq g(n + 2) - g(n + 1)$.

Q18. Soit $x \in]0, 1]$. Pour tout $n \geq 2$, $g(n + 1) - g(n) = \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n)$ (d'après la question **Q15**), ce qui reste vrai pour $n = 1$, et pour tout $n \geq 1$, $g(n + 2) - g(n + 1) = \ln(n + 1)$. D'après les questions **Q17** et **Q14**, pour tout $n \geq 1$,

$$x \ln(n) \leq g(x) + \ln(x(x + 1) \dots (x + n)) - \ln(n!) \leq x \ln(n + 1),$$

puis

$$\ln(f(x)) - x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x + 1) \dots (x + n)}\right) \leq \ln(f(x))$$

et finalement, par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$f(x) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \leq \frac{n^x n!}{x(x + 1) \dots (x + n)} \leq f(x).$$

Les membres extrêmes de cet encadrement convergent vers $f(x)$. D'après le théorème des gendarmes, la suite

$$\left(\frac{n^x n!}{x(x + 1) \dots (x + n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x + 1) \dots (x + n)} = f(x).$$

Q19. Ainsi, si f vérifie (S), alors f est uniquement définie sur $]0, 1]$. Puisque Γ vérifie (S), on a donc pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20. Soit $x \in]1, +\infty[$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in]n, n + 1]$ et donc $x - n \in]0, 1]$. D'après la question **Q15**,

$$f(x) = f((x - n) + n) = (x - n)(x - (n - 1)) \dots (x - 1)f(x - n) = (x - n)(x - (n - 1)) \dots (x - 1)\Gamma(x - n) = \Gamma(x).$$

On a montré que $f = \Gamma$.

PROBLEME

Etude d'une classe d'endomorphismes

Partie I - Deux exemples

Etude de u

Q21. On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

$$u(1) = 0, u(X) = 1 \text{ et } u(X^2) = 2X^2 + 2X. \text{ Donc, } \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M.$$

On en déduit que $\chi_u = X^2(X - 2)$. Ainsi, u admet 0 pour valeur propre double et 2 pour valeur propre simple. Ensuite, en notant C_1, C_2 et C_3 , les colonnes de M ,

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_2, C_3) = 2$$

car (C_2, C_3) est libre. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{K}_2[X]) - \text{rg}(u) = 1$. La dimension du sous-espace propre $E_0(u) = \text{Ker}(u)$ est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0. On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

Q22. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Par suite, $\text{rg}(u^2) = 1$ puis $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$. Mais les deux premières colonnes de M^2 sont nulles et donc $(1, X)$ est une famille libre de $\text{Ker}(u^2)$, de cardinal 2. Finalement, $(1, X)$ est une base de $\text{Ker}(u^2)$ et en particulier, $\text{Ker}(u^2) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$.

Enfin, $u(\text{Ker}(u^2)) = u(\text{Vect}(1, X)) = \text{Vect}(u(1), u(X)) = \text{Vect}(0, 1) = \text{Vect}(1) \subset \text{Ker}(u^2)$. Donc, $\text{Ker}(u^2)$ est stable par u .

Q23. $u(2X^2 + 2X + 1) = 2(2X^2 + 2X) + 2 = 2(2X^2 + 2X + 1)$. On pose $P_0 = 2X^2 + 2X + 1$ et on a $u(P_0) = 2P_0$. On pose encore $P_1 = 1$ et $P_2 = X$.

Les polynômes P_0, P_1 et P_2 sont trois éléments non nuls de $\mathbb{K}_2[X]$, de degrés deux à deux distincts. (P_0, P_1, P_2) est donc une famille libre de $\mathbb{K}_2[X]$. Etant de cardinal $3 = \dim(\mathbb{K}_2[X])$, la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$. Puisque $u(P_0) = 2P_0$, $u(P_1) = 0$ et $u(P_2) = P_1$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de la forme voulue avec $p = q = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $u \in \mathcal{D}$.

Etude de v

Q24. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q25. Les droites vectorielles stables par v sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur propre de v . Or, $\chi_v = X^3$ et donc v admet une unique valeur propre à savoir 0. Ensuite, $E_0(v) = \text{Ker}(v) = \{P \in \mathbb{K}_2[X] / P' = 0\} = \mathbb{K}_0[X]$. v admet une droite vectorielle stable et une seule à savoir $\mathbb{K}_0[X]$.

Q26. Soit F un plan vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$ stable par v . Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ puis $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ (E), une équation de F ($P = a + bX + cX^2 \in F \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$).

Si $\alpha \neq 0$, (E) s'écrit $a = -\frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\alpha}c$ puis

$$F = \left\{ -\frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\alpha}c + bX, cX^2, (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ b \left(-\frac{\beta}{\alpha} + X \right) + c \left(-\frac{\gamma}{\alpha} + X^2 \right), (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(Q_1, Q_2)$$

où $Q_1 = -\frac{\beta}{\alpha} + X$ et $Q_2 = -\frac{\gamma}{\alpha} + X^2$. On a $v(F) = \text{Vect}(v(Q_1), v(Q_2)) = \text{Vect}(1, 2X) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$. Mais Q_1 et Q_2 étant de degré 1 et 2 respectivement, une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de Q_1 et Q_2 est de degré 2 ou 1 et n'est jamais égale à $1 \in v(F)$. Donc, $v(F) \not\subset F$ ou encore F n'est pas stable par v .

Donc, $\alpha = 0$ puis (E) s'écrit $\beta b + \gamma c = 0$. Si $\beta \neq 0$, $F = \left\{ a - \frac{\gamma c}{\beta}X + cX^2, (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(Q_3, Q_4)$ où $Q_3 = 1$ et $Q_4 = X^2 - \frac{\gamma}{\beta}X$. Clairement $v(Q_4) = 2X \notin F$ et donc $v(F) \not\subset F$. Par suite, $\beta = 0$ (et $\gamma \neq 0$).

(E) s'écrit finalement $c = 0$ puis $F = \{a + bX, (a, b) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}_1[X]$.

Réciproquement, $v(\mathbb{K}_1[X]) = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X]$. v possède un plan stable et un seul à savoir $\mathbb{K}_1[X]$.

Q27. Si par l'absurde $v \in \mathcal{D}$, alors ou bien $\mathbb{K}_2[X]$ est somme directe de trois droites vectorielles stable par v (I), ou bien $\mathbb{K}_2[X]$ est somme directe d'une droite stable par v et d'un plan stable par v (II).

Mais (I) est impossible car v ne possède qu'une droite stable à savoir $\mathbb{K}_0[X]$. (II) est impossible car v ne possède qu'une droite stable à savoir $D_1 = \mathbb{K}_0[X]$ et qu'un plan stable à savoir $P_1 = \mathbb{K}_1[X]$ avec $D_1 \cap P_1 = \mathbb{K}_0[X] \neq \{0\}$.

Donc, $v \notin \mathcal{D}$.

Q28. Soit w l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(w) = \text{diag}(0, 1, 2)$. $-w \in \mathcal{D}$ car w admet 3 valeurs propres simples et donc $\mathbb{K}_2[X]$ est somme directe des droites propres associées qui sont stables par $-w$.

D'autre part, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(w + v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $w + v \in \mathcal{D}$ pour les mêmes raisons que pour $-w$.

Mais $(w + v) + (-w) = v \notin \mathcal{D}$. Donc, \mathcal{D} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Cas $n = 1$

Q29. Si $\dim(E) = 1$, l'endomorphisme u est une homothétie puis il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$. Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = \lambda^k \text{Id}_E$. Par suite,

$$u \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / \lambda^k \text{Id}_E = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / \lambda^k = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Cas $n = 2$

Q30. Supposons par l'absurde que la famille $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ soit liée. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$ tel que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0$. Soit j le plus petit indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. Par définition, $\sum_{i=j}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$. On prend l'image des deux membres de l'égalité par u^{k-1-j} . En tenant compte de $u^i = 0$ si $i \geq k$, on obtient $\lambda_j u^{k-1}(x) = 0$ ce qui contredit le fait que $\lambda_j \neq 0$ et $u^{k-1}(x) \neq 0$.

Donc, la famille $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est libre.

Q31. Le cardinal de cette famille, à savoir k , est inférieur ou égal à la dimension de E , à savoir 2. Ainsi, $k \leq 2$ puis $k \in \{1, 2\}$. Mais $u \neq 0$ et donc $k \neq 1$. Finalement, $k = 2$ puis $u \in \mathcal{N}_2$.

Cas général

Q32. Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. Avec les notations de l'énoncé, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & (0) \\ & & & M_1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & M_p \end{pmatrix} = M.$$

Un calcul par blocs fournit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p^k & & (0) \\ & & & M_1^k & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & M_p^k \end{pmatrix}$ puis $M^k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1^k = \dots = \lambda_p^k = 0$ et

$$M_1^k = \dots = M_p^k = 0.$$

L'étude des cas $n = 1$ et $n = 2$ (les M_i étant de format $(2, 2)$) montre alors que $M^2 = 0$ et donc que $u \in \mathcal{N}_2$.

Q33. Soit $u \in \mathcal{N}_2$. Alors, pour tout $x \in E$, $u(u(x)) = 0$ puis pour tout $x \in E$, $u(x) \in \text{Ker}(u)$ et finalement, $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $r = \text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u)) = n - r$. On a montré que $r \leq n - r$.

Q34. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}, \mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^r \mu_j f_j = 0$. En prenant l'image des deux membres par u ,

on obtient $\sum_{j=1}^r \mu_j e_j = 0$ puis $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$ car la famille (e_1, \dots, e_r) est libre.

Il reste $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i = 0$ et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ car la famille (e_1, \dots, e_{n-r}) est libre.

Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est libre. De plus, $\text{card}(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r) = n = \dim(E) < +\infty$. Finalement, la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une base de E .

Q35. La famille $\mathcal{B}(\underbrace{e_{r+1}, \dots, e_{n-r}}_{n-2r}, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r)$ est une autre base de E . Dans cette base, la matrice de u est de la forme désirée.

Q36. Donc, si $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_2$, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$. D'autre part, si $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_2$, alors $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$ et donc $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. Avec la question **Q32**, on en conclut finalement que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Partie III - Un critère d'appartenance à \mathcal{D}

Q37. Pour tout $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in (\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2$, $\deg((\mathbf{X} - \mathbf{a})^2 \mathbf{A} + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B}) \leq 3$ et donc φ est une application de $(\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2$ dans $\mathbb{K}_3[\mathbf{X}]$.

Soient $((\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)) \in ((\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}_2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1) + \mu(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)) &= \varphi((\lambda\mathbf{A}_1 + \mu\mathbf{A}_2, \lambda\mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}_2)) \\ &= (\mathbf{X} - \mathbf{a})^2(\lambda\mathbf{A}_1 + \mu\mathbf{A}_2) + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2(\lambda\mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{B}_2) \\ &= \lambda((\mathbf{X} - \mathbf{a})^2\mathbf{A}_1 + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2\mathbf{B}_1) + \mu((\mathbf{X} - \mathbf{a})^2\mathbf{A}_2 + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2\mathbf{B}_2) \\ &= \lambda\varphi((\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)) + \mu\varphi((\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)). \end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathcal{L}((\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2, \mathbb{K}_3[\mathbf{X}])$.

Soit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, $(\mathbf{X} - \mathbf{a})^2 \mathbf{A} = -(\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B}$. Si $\mathbf{B} \neq 0$, le nombre \mathbf{a} est racine d'ordre au plus 1 de $-(\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B}$ (car $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ et $\deg(\mathbf{B}) \leq 1$) et donc $-(\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B} \neq (\mathbf{X} - \mathbf{a})^2 \mathbf{A}$. Par suite, $\mathbf{B} = 0$ puis $\mathbf{A} = 0$. Ceci montre que $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0)\}$.

Enfin, $\dim((\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2) = 2^2 = 4 = \dim(\mathbb{K}_3[\mathbf{X}]) < +\infty$ et donc φ est un isomorphisme de $(\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2$ sur $\mathbb{K}_3[\mathbf{X}]$.

En particulier, φ est surjective et il existe $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0) \in (\mathbb{K}_1[\mathbf{X}])^2$ tel que $\varphi((\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)) = 1$ ou encore

$$(\mathbf{X} - \mathbf{a})^2 \mathbf{A}_0 + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B}_0 = 1.$$

Q38. Soit $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{u} - \mathbf{a}\text{Id})^2 \cap \text{Ker}(\mathbf{u} - \mathbf{b}\text{Id})^2$. On a $(\mathbf{X} - \mathbf{a})^2 \mathbf{A}_0 + (\mathbf{X} - \mathbf{b})^2 \mathbf{B}_0 = 1$ puis, en évaluant en \mathbf{u} , $(\mathbf{u} - \mathbf{a}\text{Id})^2 \circ \mathbf{A}_0(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} - \mathbf{b}\text{Id})^2 \circ \mathbf{B}_0(\mathbf{u}) = \text{Id}$ et enfin, en évaluant en \mathbf{x} (deux polynômes en \mathbf{u} commutant),

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_0(\mathbf{u})((\mathbf{u} - \mathbf{a}\text{Id})^2(\mathbf{x})) + \mathbf{B}_0(\mathbf{u})((\mathbf{u} - \mathbf{b}\text{Id})^2(\mathbf{x})) = 0.$$

Ceci montre que $\text{Ker}(\mathbf{u} - \mathbf{a}\text{Id})^2 \cap \text{Ker}(\mathbf{u} - \mathbf{b}\text{Id})^2 = \{0\}$.

Q39. Quite à supprimer les $\text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E)$ qui sont égaux à $\{0\}$ (correspondant à des nombres α_i non valeurs propres de \mathbf{u}), il ne reste que des sous-espaces propres deux à deux distincts dont on sait que la somme est directe.

Donc, pour tout \mathbf{p} -uplet de nombres deux à deux distincts $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, la somme $\sum_{i=1}^p \text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe.

Q40. Montrons par récurrence que pour tout $\mathbf{q} \in \mathbb{N}$, pour tout $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ -uplet de nombres deux à deux distincts $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$, la somme $\sum_{i=1}^p \text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E) + \sum_{j=1}^q \text{Ker}((\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E)^2)$ est directe (\mathcal{P}_q).

- Le résultat est vrai quand $\mathbf{q} = 0$ d'après la question précédente.
- Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \beta_{q+1}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}+1}$ un $(\mathbf{p} + \mathbf{q} + 1)$ -uplet de nombres deux à deux distincts. Pour simplifier les notations, pour $i \in \llbracket 1, \mathbf{p} \rrbracket$, on pose $F_i = \text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E)$ et pour $j \in \llbracket 1, \mathbf{q} + 1 \rrbracket$, on pose $G_j = \text{Ker}((\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E)^2)$.

Par hypothèse de récurrence, la somme $\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^q G_j$ est directe.

Soit $\mathbf{x} \in \left(\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^q G_j \right) \cap G_{q+1}$. Il existe $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in F_1 \times \dots \times F_p \times G_1 \times \dots \times G_p$ tel que $\mathbf{x} = x_1 + \dots + x_p + y_1 + \dots + y_q$.

On prend l'image des deux membres par $(\mathbf{u} - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2$ et on obtient

$$(\alpha_1 - \beta_1)^2 x_1 + \dots + (\alpha_p - \beta_{q+1})^2 x_p + \sum_{i=1}^q (\mathbf{u} - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_i) = 0.$$

Maintenant, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \left((u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2 (y_j) \right) = 0$ (car deux polynômes en u commutent) et donc, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2 (y_j) \in G_j$.

Puisque la somme $\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^q G_j$ est directe, ceci entraîne, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(\alpha_i - \beta_i)^2 x_i = 0$ puis $x_i = 0$ et pour

tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2 (y_j) = 0$.

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $y_j \in \text{Ker} \left((u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \right) \cap \text{Ker} \left((u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2 \right) = \{0\}$ d'après la question **Q38** et donc, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $y_j = 0$. Finalement, $x = 0$.

En résumé, la somme $\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^q G_j$ est directe et $G_{q+1} \cap \left(\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^q G_j \right) = \{0\}$. On en déduit que la somme

$$\sum_{i=1}^p F_i + \sum_{j=1}^{q+1} G_j \text{ est directe.}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Q41. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_q) \in \mathbb{K}^{p+2q}$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 0$ (\star).

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. α_i n'est pas racine de P_i et est racine de tous les autres polynômes. Donc, en évaluant les membres de (\star) en α_i , on obtient $\lambda_i P_i(\alpha_i) = 0$ puis $\lambda_i = 0$ car $P_i(\alpha_i) \neq 0$. Il reste $\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. On a $\nu_i R_i = -\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^q \nu_k R_k$. Le nombre β_i est racine du membre de droite et n'est pas racine du

membre de gauche si $\nu_i \neq 0$. Donc, $\nu_i = 0$. Il reste $\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j = 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$. $\mu_i Q_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \mu_j R_j$. Le nombre β_i est racine d'ordre au moins 2 du membre de droite et est racine simple

du membre de gauche si $\mu_i \neq 0$. Donc, $\mu_i = 0$.

On a montré que la famille $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre. De plus, chacun des P_i et chacun des Q_j est de degré $p+2q-1$ et chacun des R_k est de degré $p+2q-2$. Donc, chacun des polynômes précédents est un élément de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ puis la famille \mathcal{B} est une famille libre de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

Enfin, $\text{card}(\mathcal{B}) = p+2q = \dim(\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]) < +\infty$ et finalement \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

Q42. En particulier, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_q) \in \mathbb{K}^{p+2q}$ tel que $1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k$. En évaluant en u , on obtient

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u) + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k(u).$$

Soit $x \in E$. On a $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i (P_i(u))(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j (Q_j(u))(x) + \sum_{k=1}^q \nu_k (R_k(u))(x)$ ou encore, si on pose pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$\lambda_i (P_i(u))(x) = x_i$, et pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\mu_j (Q_j(u))(x) + \nu_j (R_j(u))(x) = y_j$, on a $x = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^q y_j$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u - \alpha_i \text{Id}_E)(x_i) = \lambda_i (P(u))(x) = 0$ et donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$.

De même, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 (y_j) = 0$ et donc pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $y_j \in \text{Ker} \left((u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \right)$. On a montré

que $E = \sum_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) + \sum_{j=1}^q \text{Ker} \left((u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \right)$. Cette somme étant directe d'après la question **Q40**,

on a finalement montré que

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq q} \left(\text{Ker}(\mathbf{u} - \beta_i \text{Id}_E)^2 \right).$$

Q43. Déjà, dans une base \mathcal{B}_1 adaptée à la somme $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \text{Ker}(\mathbf{u} - \alpha_i \text{Id}_E)$ (qui est stable par \mathbf{u}), la matrice de \mathbf{u}_F est diagonale (blocs de taille 1).

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. $\text{Ker}((\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E)^2)$ est stable par $\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E$ (car deux polynômes en \mathbf{u} commutent). L'endomorphisme de $\text{Ker}((\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E)^2)$ induit par $\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E$ est nilpotent d'indice inférieur ou égal à 2. D'après la question **Q35**, il existe une base \mathcal{C}_j de $\text{Ker}((\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E)^2)$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par $\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E$ est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de format 1 ou 2 et il en est de même de la matrice de l'endomorphisme induit par $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \beta_j \text{Id}_E) + \beta_j \text{Id}_E$. La réunion des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_q$, fournit une base de E dans laquelle la matrice de \mathbf{u} est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de format 1 ou 2. Quitte à réordonner les vecteurs de cette base en plaçant au début les vecteurs propres, on obtient une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de \mathbf{u} est du type (ii).

On a montré que $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$.