SESSION 2026

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

EXERCICE 1

Réduction de matrices par blocs

Partie I - Etude d'une première forme

I.1 - Etude d'un exemple

Q1. $M^T = \begin{pmatrix} A^T & A^T \\ A^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = M$. Donc, M est symétrique réelle puis M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

Q2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis, en développant suivant la première colonne,

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 & -2 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ X-2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)^2 \begin{vmatrix} X-2 & -2 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X-2 & -2 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= \left((X-1)^2 - 1\right)\left((X-2)^2 - 4\right) = X(X-2)X(X-4) \\
&= X^2(X-2)(X-4)
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Sp}(M) = (0, 0, 2, 4)$.

Q3. Les valeurs propres de M sont positives et donc M est positive. Mais 0 est valeur propre de M et donc M n'est pas définie positive.

I.2 - Réduction de la matrice M

Q4. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & 0_n \\ 0_n & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Donc, P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$.

Q5. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2A & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, la matrice M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}$.

Q6. Un calcul par blocs fournit $\chi_M = \chi_D = \det\begin{pmatrix} XI_n & 0_n \\ 0_n & XI_n - 2A \end{pmatrix} = \det(XI_n) \times \times \det(XI_n - 2A)$ puis,

$$\chi_M = X^n 2^n \det\left(\frac{X}{2}I_n - A\right) = X^n 2^n \chi_A\left(\frac{X}{2}\right).$$

Ainsi, si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (0, \ldots, 0, 2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n)$.

Q7. Soit $R = Q\left(\dfrac{X}{2}\right)$. Un calcul par blocs fournit

$$R(D) = \sum_{k=0}^{d} q_k \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} q_0 I_n & 0_n \\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 I_n & 0_n \\ 0_n & Q(A) \end{pmatrix}.$$

Par suite, $R(D) = 0_n \Leftrightarrow Q(A) = 0_n$ et $q_0 = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0_n$ et $Q(0) = 0$.

Q8. Si A est diagonalisable, il existe un polynôme Q scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, annulateur de A. Si 0 est racine de Q, le polynôme $R = Q\left(\dfrac{X}{2}\right)$ est annualateur de D, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et si $Q(0) \neq 0$, le polynôme $Q_1 = XQ$ est annulateur de A, scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et s'annule en 0 puis $R = Q_1\left(\dfrac{X}{2}\right)$ est annualateur de D, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. Donc, D est diagonalisable puis M est diagonalisable car semblable à D.

Si M est diagonalisable, alors D est diagonalisable puis il existe un polynôme R scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, annulateur de D. De plus, 0 est valeur propre de D (car la première colonne de D est nulle et donc D n'est pas inversible) et donc 0 est racine du polynôme annulateur R. Par suite, le polynôme $Q = R(2X)$ est annulateur de A, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. A est donc diagonalisable.

On a montré que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II - Etude d'une seconde forme

Q9. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$.

- Le résultat est vrai pour $k = 0$ (si on adopte la convention $A^0 = I_n$ et $M^0 = I_{2n}$).
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$. Alors,
$$M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$.

Q10. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Le résultat est vrai si $d = 0$ car $q_0 I_{2n} = \begin{pmatrix} q_0 I_n & 0_n \\ 0_n & q_0 I_n \end{pmatrix}$. Supposons maintenant $d \geqslant 1$.

$$Q(M) = \sum_{k=0}^{d} q_k M^k = \sum_{k=0}^{d} q_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} k q_k A^k \\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k & A\displaystyle\sum_{k=1}^{d} k q_k A^{k-1} \\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} Q(A) & AQ'(A) \\ 0_n & Q(A) \end{pmatrix}.$$

Q11. L'égalité $S(M) = 0_{2n}$ fournit en particulier $S(A) = 0_n$ et donc A est diagonalisable (car S est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples). Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R}$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Mais alors, en posant $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} s_k X^k$,

$$S'(A) = \sum_{k=1}^{d} k s_k A^{k-1} = P\left(\sum_{k=1}^{d} k s_k D^{k-1}\right)P^{-1} = PS'(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}\left(S'(\lambda_1), \ldots, S'(\lambda_n)\right)P^{-1}.$$

Ceci montre que $S'(A)$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(S'(A)) = (S'(\lambda_1), \ldots, S'(\lambda_n))$.

Q12. Puisque S est annulateur de M et donc de A, les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de A sont racines du polynôme annulateur S. S étant à racines simples, aucune des valeurs propres de A n'est racine de S'. Puisque $\mathrm{Sp}(S'(A)) = (S'(\lambda_1), \ldots, S'(\lambda_n))$, 0 n'est pas valeur propre de $S'(A)$ et donc $S'(A)$ est inversible.

Si M est diagonalisable, il existe $S \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et annulateur de M. Le polynôme S vérifie $S(A) = AS'(A) = 0_n$. D'après le début de la question, la matrice $S'(A)$ est inversible et donc simplifiable. L'égalité $AS'(A) = 0_n$ fournit $A = 0_n$. Réciproquement, si $A = 0_n$, alors $M = 0_{2n}$ est diagonalisable.

En résumé, M est diagonalisable si et seulement si $A = 0_n$.

EXERCICE II

Autour de la loi géométrique

Partie I - Etude de la variable aléatoire S_n

Q13. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_k = \ell) = p(1-p)^{\ell-1}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \geqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. Donc, $S_n(\Omega) \subset \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Inversement, soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_1(\omega) = p + 1 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $X_k(\omega) = 1$. Alors, $n + p = S_n(\omega) \in S_n(\Omega)$.

On a montré que $S_n(\Omega) = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

Q14. On sait que $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1-p}{p^2}$. Ensuite, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = np.$$

Ensuite, les variables X_k étant indépendantes et donc deux à deux indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Q15. Soit $t \in [-1, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\mathbb{P}(Y = k)t^k\right| = \mathbb{P}(Y = k)|t|^k \leqslant \mathbb{P}(Y = k)$. La série de terme général $\mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge et donc la série de terme général $\mathbb{P}(Y = k)t^k$ converge absolument et donc converge.

La fonction G_Y est définie sur $[-1, 1]$ au moins et en particulier, le rayon de convergence de la série entière de somme G_Y est supérieur ou égal à 1.

Q16. Soit $t \in]-1, 1[$.

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=1}^{+\infty} (qt)^{k-1} = \frac{pt}{1-qt} \text{ (car } |qt| < 1\text{)}.$$

Ensuite, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et il est de même des variables aléatoires $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$. On en déduit que

$$G_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n.$$

Q17. Pour $x \in]-1, 1[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. En dérivant $n-1$ fois, on obtient pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-(n-1))!}x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!}x^k,$$

et donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1}x^k$.

Par suite, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}G_{S_n}(t) &= (pt)^n(1-qt)^{-n} = (pt)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1}(qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k t^{n+k} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

Partie II - Loi de la variable aléatoire V_n

Q18. Soit $k \in \mathbb{N}$ (y compris $k = 0$).

$$\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} pq^{\ell-1} = pq^k \frac{1}{1-(1-q)} = q^k.$$

Q19. Soit $k \in \mathbb{N}$. $V_n \leqslant k \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \leqslant k$ et donc $\{V_n \leqslant k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n \leqslant k) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k) \text{ (car les variables } X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i > k)) = \left(1-q^k\right)^n.\end{aligned}$$

Q20. On sait que V_n est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(V_n \geqslant k)$, $k \geqslant 1$, converge et que dans ce cas

$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n \geqslant k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n > k).$$

Mais, puisque $q \in]-1,1[$, $q^k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ et donc

$$\mathbb{P}(V_n > k) = 1 - \left(1-q^k\right)^n \underset{k \to +\infty}{=} 1 - \left(1 - nq^k + o\left(q^k\right)\right) = nq^k + o\left(q^k\right),$$

et donc $\mathbb{P}(V_n > k) \underset{k \to +\infty}{\sim} nq^k > 0$. La série géométrique de terme général nq^k converge et donc, la série de terme général $\mathbb{P}(V_n > k)$ converge et de plus,

$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1-q^k\right)^n\right).$$

Q21. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\{V_n \leqslant k\}$ est la réunion disjointe des événements $\{V_n \leqslant k-1\}$ et $\{V_n = k\}$ (y compris quand $k = 1$ car $\{V_n \leqslant 0\} = \varnothing$). Donc,

$$\mathbb{P}(V_n = k) = \mathbb{P}(V_n \leqslant k) - \mathbb{P}(V_n \leqslant k-1) = \left(1-q^k\right)^n - \left(1-q^{k-1}\right)^n \text{ (y compris si } k = 1).$$

Partie III - Equivalent de l'espérance de V_n

Q22. La fonction φ_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\varphi_n'(x)=n\ln(q)q^x\left(1-q^x\right)^{n-1}$. Ensuite, puisque $q\in]0,1[$, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $q^x\in]0,1]$ puis $1-q^x\geqslant 0$ et donc $\left(1-q^x\right)^{n-1}\geqslant 0$. Comme $\ln(q)\leqslant 0$, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\varphi_n'(x)\leqslant 0$. La fonction φ_n est donc décroissante sur $[0,+\infty[$.

La fonction φ_n est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $x^2\varphi_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}nx^2q^x\underset{x\to+\infty}{=}o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\varphi_n(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ puis la fonction φ_n est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

On a montré que la fonction φ_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Q23. $\mathbb{E}\left(V_n\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_n(k)$. La fonction φ_n étant décroissante sur $[0,+\infty[$, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_k^{k+1}\varphi_n(x)\,dx\leqslant(k+1-k)\varphi_n(k)=\varphi_n(k).$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1}\varphi_n(x)\,dx\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_n(k)=\mathbb{E}\left(V_n\right).$$

De même, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n(k)\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}\varphi_n(x)\,dx$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_n(k)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\varphi_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx$ et finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_n(k)\leqslant 1+\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx$. On a montré que

$$\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx\leqslant\mathbb{E}\left(V_n\right)\leqslant 1+\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx.$$

Q24. La fonction $x\mapsto 1-q^x$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, strictement croissante sur $[0,+\infty[$, bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. On peut donc effectuer le changement de variables $u=1-q^x$ et l'intégrale obtenue après changement de variable est convergente.

$u=1-q^x$ fournit $x=\dfrac{1}{\ln(q)}\ln(1-u)$ puis $dx=-\dfrac{1}{\ln(q)(1-u)}\,du$. On obtient

$$\int_0^{+\infty}\varphi_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-q^x\right)^n\right)dx=-\frac{1}{\ln(q)}\int_0^1\frac{1-u^n}{1-u}\,du.$$

Q25. $\displaystyle\int_0^1\frac{1-u^n}{1-u}\,du=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}u^k\,du=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{\ln(q)\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\frac{\mathbb{E}\left(V_n\right)}{\ln(n)}\leqslant-\frac{1}{\ln(q)\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{\ln(n)}.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $-\dfrac{1}{\ln(q)}$ quand n tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet d'affirme que $\dfrac{\mathbb{E}\left(V_n\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\to}-\dfrac{1}{\ln(k)}$ ou encore que

$$\mathbb{E}\left(V_n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln(n)}{\ln(q)}.$$

EXERCICE 3

Résolution d'une équation différentielle non ordinaire

Partie I - Généralités

Q26. $\mathcal{S}_\lambda\subset\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $0\in S_\lambda$. Soient $(f,g)\in\left(\mathcal{S}_\lambda\right)^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)=\alpha f(\lambda x)+\beta g(\lambda x)=(\alpha f+\beta g)(\lambda x)$$

et donc $\lambda f+\mu g\in\mathcal{S}_\lambda$. Ceci montre que $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Q27. Immédiatement $\mathcal{S}_1 = \{x \mapsto ae^x,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Q28. Soit $f \in \mathcal{S}_0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(0)$ et donc f' est constante puis f est affine. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $f \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(0) \Leftrightarrow a = b$. Donc,

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto a(x+1),\ a \in \mathbb{R}\}.$$

Q29. Soit $f \in \mathcal{S}_{-1}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant une nouvelle fois, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ et donc $f'' + f = 0$.

Ainsi, nécessairement il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Réciproquement, soit f une telle fonction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - f(-x) = (-a\sin(x) + b\cos(x)) - (a\cos(x) - b\sin(x)) = (b-a)(\cos(x) + \sin(x)),$$

puis $f \in \mathcal{S}_{-1} \Leftrightarrow a = b$. Donc, $\mathcal{S}_{-1} = \{x \mapsto a(\cos(x) + \sin(x)),\ a \in \mathbb{R}\}$.

Partie II - Solutions développables en série entière

Q30. Soit $n \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{\lambda^{\frac{(n+1)n}{2}}/(n+1)!}{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}/n!}\right| = \dfrac{|\lambda|^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière de l'énoncé est égal à $+\infty$.

Q31. On sait que φ est dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(\lambda x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}+n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \varphi'(x).\end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathcal{S}_\lambda$.

Q32. Sous l'hypothèse $R_a = +\infty$,

$$\begin{aligned}f'(x) - f(\lambda x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - \lambda^n a_n\right) x^n\end{aligned}$$

puis, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$f \in \mathcal{S}_\lambda \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(\lambda x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} - \lambda^n a_n = 0.$$

Q33.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} - \lambda^n a_n = 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\lambda^{n-1}}{n} \times \frac{\lambda^{n-2}}{n-1} \times \ldots \times \frac{\lambda}{2} \times \frac{1}{1} a_0\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} a_0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} a_0.\end{aligned}$$

Ainsi, si f est une solution de $\mathcal{S}_\lambda$ sur $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f = a_0\varphi$.

Réciproquement, d'après la question **Q31**, les fonctions de cette forme sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et solution de $\mathcal{S}_\lambda$ sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est solution de (E_λ) si et seulement $f \in \text{Vect}(\varphi)$.

Partie III - Détermination de toutes les solutions

Q34. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t) \quad (\mathscr{P}_n).$$

- La formule est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t)$. Maintenant, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = f(\lambda t)$ et donc $f^{(n)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou encore f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}\right)'(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \lambda^n f'(\lambda^n t) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^n \times \lambda t) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(\lambda^{n+1} t\right).$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t)$.

Q35. Soit $x \in [-a, a]$. La fonction f est continue sur le segment $[-a, a]$ et en particulier, la fonction f est bornée sur ce segment. Donc, $M = \|f\|_{\infty,[-a,a]} < +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [-a, a]$,

$$|g_n(t)| = \frac{|x-t|^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \frac{|x-t|^n}{n!}|\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}}|f(\lambda^n t)| \leqslant \frac{M(2a)^n}{n!} \text{ (car } \lambda \in [-1,1]),$$

puis $\|g_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{M(2a)^n}{n!}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{M(2a)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\|g_n\|_{\infty,[-a,a]} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ceci montre que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-a, a]$.

Q36. Soit $x \in [-a, a]$. Chaque fonction g_n est continue sur le segment $I = [0, x]$ ou $I = [x, 0]$ suivant que $x \geqslant 0$ ou $x < 0$ et la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur ce segment. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x g_n(t)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0.$$

Mais alors, d'après la formule de Taylor donnée par l'énoncé, pour tout $x \in [-a, a]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{+} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

et donc que f est développable en série entière que $\mathbb{R}$.

Q37. D'après les questions **Q33** et **Q36**, $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Vect}(\varphi)$. Puisque $\varphi \neq 0$ (car $\varphi(0) = 1 \neq 0$), $\mathcal{S}_\lambda$ est un espace vectoriel de dimension 1.

