
 MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1. En notant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de la matrice J ,

$$\operatorname{rg}(J) = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{rg}(C_1, C_1, C_1) = \operatorname{rg}(C_1) = 1 \text{ car } C_1 \neq 0.$$

La matrice J est symétrique réelle et donc la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. Ensuite, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(J)) = 3 - \operatorname{rg}(J) = 2$. Donc, 0 est valeur propre d'ordre 2 (car J est diagonalisable). La dernière valeur propre λ de J est fournie par la trace de J :

$$0 + 0 + \lambda = \operatorname{Tr}(J) = 3$$

puis $\lambda = 3$. Ainsi, $\operatorname{Sp}(J) = (0, 0, 3)$ puis, il existe $P \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(0, 0, 3)$.

Q2. $A = aJ + bI_3 = aPDP^{-1} + bPI_3P^{-1} = P(aD + bI_3)P^{-1}$. La matrice A est semblable à la matrice diagonale

$$\Delta(a, b) = aD + bI_3 = \operatorname{diag}(b, b, 3a + b).$$

Q3. La matrice A est semblable à la matrice $\Delta(a, b)$ et a donc même polynôme minimal que cette matrice. Puisque $a \neq 0$, $3a + b \neq b$ puis $\Delta(a, b)$ admet exactement deux valeurs propres à savoir $\lambda_1 = b$ d'ordre 2 et $\lambda_2 = 3a + b$ d'ordre 1. Puisque $\Delta(a, b)$ est diagonalisable car diagonale, on sait que son polynôme minimal est le polynôme unitaire admettant λ_1 et λ_2 pour racines simples et pour seules racines. Donc,

$$\pi_A = \pi_{\Delta(a, b)} = (X - b)(X - (3a + b)).$$

Q4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par π_A s'écrit $X^n = Q_n \pi_A + \alpha_n X + \beta_n$ (*) où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant les deux membres de l'égalité (*) en b et $\lambda = 3a + b$, on obtient $\begin{cases} \alpha_n b + \beta_n = b^n \\ \alpha_n \lambda + \beta_n = \lambda^n \end{cases}$ puis $\alpha_n = \frac{b^n - \lambda^n}{b - \lambda}$

$$((I) - (II)) \text{ et } \beta_n = \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{b - \lambda} (b(II) - \lambda(I)).$$

On évalue maintenant les deux membres de l'égalité (*) en A . En tenant compte de $\pi_A(A) = 0$ (par définition du polynôme minimal), on obtient

$$A^n = \frac{1}{b - \lambda} ((b^n - \lambda^n) A + (b\lambda^n - \lambda b^n) I_3).$$

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Montrons alors par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.

- L'égalité est vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons que $J^k = 3^{k-1}J$. Alors

$$J^{k+1} = J^k J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1} \times 3J = 3^{(k-1)+1}J.$$

On a montré par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices aJ et bI_3 commutent. On peut utiliser la formule du binôme de NEWTON qui fournit :

$$\begin{aligned}
 A^n &= (aJ + bI_3)^n = (bI_3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (aJ)^k (bI_3)^{n-k} = b^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} b^{n-k} J \\
 &= b^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} \right) J = b^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} - b^n \right) J \\
 &= b^n I_3 + \frac{(3a + b)^n - b^n}{3} J.
 \end{aligned}$$

EXERCICE II

Q5. $1 + j + j^2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$. Donc, si par exemple $P = X^2 + 2X + 3$, alors $P(\omega_1) = P(j) = j^2 + 2j + 3 = j + 2$ et $P(\omega_2) = P(\bar{j}) = \overline{P(j)} = \bar{j}^2 + 2$ puis,

$$P(\omega_1)P(\omega_2) = (j + 2)(\bar{j}^2 + 2) = (1 + 2j + 2j^2 + 4) = 3 \in \mathbb{R}.$$

Q6. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
 X_J &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \\
 &= X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \end{vmatrix} \\
 &= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} \text{ (déterminants triangulaires)} \\
 &= X^n - 1.
 \end{aligned}$$

Q7. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice J . En notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et en adoptant la convention $e_{i+n} = e_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = e_{i-1}$. Mais alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^k(e_i) = e_{i-k}$. Par suite, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où le 1 de la première ligne est placé en $(k+1)$ -ème colonne. On en déduit que

$$A = a_0 I_3 + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = P(J).$$

Q8. Le polynôme caractéristique de J est à racines simples dans \mathbb{C} . Donc, J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les valeurs propres de J sont les n racines n -èmes de l'unité ω_k , $0 \leq k \leq n-1$. Donc, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = QDQ^{-1}$ où $D = \text{diag}(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

Mais alors, $A = P(J) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1} = Q \text{diag}(P(\omega_k))_{0 \leq k \leq n-1} Q^{-1}$.

Q9. A est semblable à la matrice $\text{diag}(P(\omega_k))_{0 \leq k \leq n-1}$ et a en particulier même déterminant que cette matrice. Donc (erreur d'énoncé très probable),

$$\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \det(A) \in \mathbb{R} \text{ (car } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\text{)}.$$

On note que si $P(1) \neq 0$, $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \frac{\det(A)}{P(1)} \in \mathbb{R}$. Mais si $P(1) = 0$, il faut s'y prendre autrement que ce que fait l'énoncé.

PROBLEME -

Q10. Question de cours

a) Soit $x \in E$. $p_F(x) \in F$ et donc il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$. Ensuite, puisque (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormée de F , pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle p_F(x), e_i \rangle = \lambda_i$. Puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle x - p_F(x), e_i \rangle = 0$ puis

$$\lambda_i = \langle p_F(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle.$$

Finalement, $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

b) Soit $x \in E$. D'après le théorème de PYTHAGORE, puisque $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + x - p_F(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

On a montré que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

Puisque (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormée de F et que $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, on sait que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2$. On a donc montré que

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 \text{ (inégalité de BESSEL)}.$$

Q11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$ et donc $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Soit $(f, g) \in E^2$. La fonction $h : t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in I$,

$$|h(t)| = |f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{1}{2}(f(t))^2 e^{-t} + \frac{1}{2}(g(t))^2 e^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t))^2 e^{-t} + \frac{1}{2}(g(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I et il en est de même de la fonction h . Finalement, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I .

Q12. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. $E \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $0 \in E$. Soient alors $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $t \mapsto (\lambda f(t) + \mu g(t))^2 e^{-t}$ est continue sur I et pour tout réel $t \in I$,

$$(\lambda f(t) + \mu g(t))^2 e^{-t} = \lambda^2 (f(t))^2 e^{-t} + 2\lambda\mu f(t)g(t)e^{-t} + \mu^2 (g(t))^2 e^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto (\lambda f(t) + \mu g(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrable sur I (d'après la question **Q11** entres autres) et finalement la fonction $\lambda f + \mu g$ est un élément de E . On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Vérifions maintenant que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- D'après la question **Q11**, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} .
- Soit $(f, g) \in E^2$.

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)e^{-t} dt = \langle g|f \rangle.$$

Donc, $\langle | \rangle$ est symétrique.

- Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda f_1 + \mu f_2 | g \rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)) g(t) e^{-t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} f_1(t) g(t) e^{-t} dt + \mu \int_0^{+\infty} f_2(t) g(t) e^{-t} dt \\ &= \lambda \langle f_1 | g \rangle + \mu \langle f_2 | g \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle | \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

- Soit $f \in E$. Pour tout $t \in I$, $(f(t))^2 e^{-t} \geq 0$ puis $\langle f|f \rangle = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt \geq 0$ par positivité de l'intégration. $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur E .
- Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in I, (f(t))^2 e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in I, f(t) = 0 \Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

$\langle | \rangle$ est définie.

En résumé, $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur E et donc $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q13. On sait que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Vérifions que $F \subset E$. Soit $P \in F$.

La fonction $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est continue sur I . De plus, $t^2 (P(t))^2 e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} t^2 O(t^{2n}) e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^{2n+2} e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

d'après un théorème de croissances comparées et donc $(P(t))^2 e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction

$t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et donc sur I . Finalement, la fonction P est un élément de E .

On a montré que $F \subset E$ et donc F est un sous-espace vectoriel de E .

Q14. a) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned} h_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (x^n)^{(p-k)} (e^{-x})^{(k)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{p!}{(n-p+k)!} x^{n-p+k} (-1)^k e^{-x} \\ &= p! e^{-x} \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{1}{(n-p+k)!} \binom{p}{k} x^{n-p+k}. \end{aligned}$$

Si $p < n$, pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $n-p+k \geq n-p > 0$ et donc $h_n^{(p)}(0) = 0$.

b) D'après la question précédente, pour tout réel x , $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \times n! e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} x^k$ et donc

$L_n \in F$. De plus, $\deg(L_n) = n$ et $\text{dom}(L_n) = (-1)^n \frac{1}{n!} \binom{n}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Q15. (Erreur d'énoncé. Il faut lire : exprimer $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$.) Soit $g \in \mathbb{R}[X]$.

Montrons par récurrence finie que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t) h_n^{(n-k)}(t) dt$.

- Le résultat est vrai quand $k = 0$.

• Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons que $\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t) dt$.

D'après la question précédente, $h_n^{(n-(k+1))}(0) = 0$ (car $n - (k+1) < n$). D'autre part, $g^{(k)}h_n^{(n-(k+1))}$ est le produit d'un polynôme par e^{-t} . Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-(k+1))}(t) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Les deux fonctions $g^{(k)}$ et $h_n^{(n-(k+1))}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence de tous les termes, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t) dt &= (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t) dt \\ &= (-1)^k \left(\left[g^{(k)}(t)h_n^{(n-(k+1))}(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-(k+1))}(t) dt \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-(k+1))}(t) dt. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence. On en déduit encore que

$$\begin{aligned} \langle g | L_n \rangle &= \int_0^{+\infty} g(t) \frac{e^t}{n!} h_n^{(n)}(t) e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Q16. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i < j$. D'après la question **Q14**, $\deg(L_i) = i < j$ et donc, $L_i^{(j)} = 0$. D'après la question **Q15**, $\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) L_j(t) dt = 0$.

Q17. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Déjà $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence de chaque terme, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = \left[t^{n+1} (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n (-e^{-t}) dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1)I_n.$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **Q15**,

$$\begin{aligned} \langle L_n | L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times n! \times t^n e^{-t} dt \text{ (car } \deg(L_n) = n \text{ et } \text{dom}(L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}) \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = 1. \end{aligned}$$

Q18. Puisque pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(L_i) = i$, on sait que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base $F = \mathbb{R}_n[X]$. De plus, d'après les questions **Q16** et **Q17**, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle L_i | L_j \rangle = \delta_{i,j}$. Donc, (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base orthonormée de l'espace euclidien $(F, \langle | \rangle)$.

Par suite, pour tout $g \in E$, $p_F(g) = \sum_{i=0}^n \langle g, L_i \rangle L_i$.

Q19. Soit $g \in E$. D'après la question de cours **Q10**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n \langle g, L_i \rangle^2 = \|p_F(g)\|^2 \leq \|g\|^2$. Ainsi, la série de terme général $\langle g, L_i \rangle^2$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. Donc, la série de terme général $\langle g, L_i \rangle^2$, $i \in \mathbb{N}$, converge.

De plus, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\sum_{i=0}^{+\infty} \langle g, L_i \rangle^2 \leq \|g\|^2$.

Q20. (Erreur d'énoncé) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $(g_\alpha(t))^2 e^{-t} = e^{(-2\alpha-1)t}$. Par suite, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (g_\alpha(t))^2 e^{-t} dt$ converge si et seulement si $-2\alpha - 1 < 0$ ou encore $\alpha > -\frac{1}{2}$. Ainsi, si $\alpha > -\frac{1}{2}$, alors $g_\alpha \in E$.

Soit donc $\alpha > -\frac{1}{2}$. $\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} (g_\alpha(t))^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-2\alpha-1)t} dt = \left[\frac{e^{(-2\alpha-1)t}}{-2\alpha-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet que la formule établie à la question **Q15** reste valable pour $g \in E$, ce qui est clair.

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha | L_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-\alpha)^n e^{-\alpha t} t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha+1} \right)^n e^{-u} \frac{du}{\alpha+1} \quad (\text{en posant } u = (\alpha+1)t) \\ &= \frac{\alpha^n}{n!(\alpha+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^n. \end{aligned}$$

Par suite, en tenant compte du fait que la série converge obligatoirement d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha, L_n \rangle^2 &= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} \right)^n \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{(\alpha+1)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1} \\ &= \|g_\alpha\|^2 \quad (\text{égalité de PARSEVAL}). \end{aligned}$$