

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1.

```
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo < > 2025 ;
```

Q2.

```
SELECT nom, prenom, SUM(montant)
FROM ELEVES JOIN PAIEMENTS on ELEVES.id=id_eleve
GROUP BY id_eleve
ORDER BY nom, prenom ;
```

Remarques.

- Les mots-clés **JOIN ... ON** créent une table intermédiaire formée du produit cartésien des deux tables et applique ensuite la requête sur la nouvelle relation. L'interrogation de plusieurs tables simultanément rend nécessaire le préfixage de l'attribut par le nom de la table pour le cas où certaines d'entres-elles auraient des noms d'attributs en commun d'où l'utilisation de **ELEVES.id** et de **id_eleves**). On peut alléger cette syntaxe à l'aide d'alias pour la rendre plus compacte.

- On rappelle les fonctions d'agrégation "statistiques" :

COUNT() nombre d'enregistrements sur une table ou une colonne distincte
MAX() valeur maximale d'une colonne
MIN() valeur minimale d'une colonne
SUM() calcul de la somme sur un ensemble d'enregistrement
AVG() calcul de la moyenne sur un ensemble d'enregistrement

Q3.

```
SELECT e1.id, e1.email
FROM
    ELEVES AS e1 JOIN ELEVES AS e2
    ON e1.nom=e2.nom AND e1.prenom=e2.prenom AND e1.email=e2.email
    AND e1.promo=e2.promo AND e1.id<>e2.id ;
```

Remarques.

Cette requête SQL réalise une auto-jointure sur la table **ELEVES** pour identifier les doublons d'élèves enregistrés plusieurs fois sous des identifiants (id) différents.

ELEVES AS e1 JOIN ELEVES AS e2 : On joint la table avec elle-même en créant deux alias (e1 et e2) pour pouvoir comparer chaque élève avec tous les autres.

ON e1.nom = e2.nom AND ... AND e1.promo = e2.promo : On cherche les lignes qui ont exactement les mêmes données personnelles (nom, prénom, e-mail et promo identiques).

AND e1.id <> e2.id : C'est la condition clé. Elle exclut la comparaison d'une ligne avec elle-même et ne retient que les profils strictement identiques mais possédant deux identifiants distincts.

SELECT e1.id, e2.email : Renvoie l'identifiant et l'adresse e-mail des enregistrements détectés comme doublons.

Q4.

```
SELECT e.id
FROM ELEVES AS e
LEFT JOIN PAIEMENTS AS p ON e.id = p.id_eleve
WHERE p.id_eleve IS NULL ;
```

Remarques.

LEFT JOIN PAIEMENTS : On prend la liste de tous les élèves et on cherche leurs paiements associés. S'il n'y a pas de paiement pour un élève, les colonnes de la table **PAIEMENTS** reçoivent la valeur **NULL**.

Le **LEFT JOIN** est une jointure SQL qui renvoie toutes les lignes de la table de gauche, associées aux lignes correspondantes de la table de droite. Si aucune correspondance n'est trouvée dans la table de droite, le résultat affiche la valeur **NULL** pour les colonnes de cette dernière.

Table de gauche (principale) : Conservée à 100 %, aucune ligne n'est éliminée.

Table de droite (secondaire) : Seules les données correspondant à la condition d'association (**ON**) sont ajoutées. S'il n'y a pas de correspondance, les champs sont remplis avec **NULL**.

La table placée après le mot **FROM** est la table de gauche. La table placée après **LEFT JOIN** est la table de droite. Le mot **ON** sert à dire quelle colonne lie les deux tables.

WHERE p.id_élève IS NULL : On filtre le résultat pour ne garder que les lignes où le paiement est absent.

SELECT e.id : On affiche uniquement l'identifiant de ces élèves sans paiement.

On peut également utiliser la commande **EXCEPT**

EXERCICE II

Q5. Soit $t \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|P(X = n)t^n| = P(X = n)|t|^n \leq P(X = n)$. La série de terme général $P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme 1). Donc, la série numérique de terme général $P(X = n)t^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge.

On a montré que la fonction G_X est définie sur $[-1, 1]$ au moins.

Q6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Si X suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$, alors G_X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Q7. D'après la question **Q5**, les séries entières de sommes respectives G_X et G_Y ont un rayon de convergence au moins égal à 1. On sait qu'on peut effectuer leur produit de CAUCHY sur $] -1, 1[$ au moins. Pour tout $t \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y = n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(\{X = k\} \cap \{Y = n - k\}) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = n - k) \right) t^n \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n \right) \quad (\text{produit de CAUCHY}) \\ &= G_X(t)G_Y(t). \end{aligned}$$

Q8. D'après les questions **Q6** et **Q7**, pour tout $t \in] -1, 1[$ au moins,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n)t^n = G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} \times e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} t^n.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Z = n) = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}$. Donc, Z suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \mu$.

PROBLEME

Partie I - Calcul d'une intégrale

Q9. Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in] -\infty, +\infty[$, $\left| \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right| = \frac{x}{x^2 + t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$ est intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ car cette fonction est dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $-\infty$ et $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ est intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ puis que $g(x)$ existe.

On a montré que la fonction g est bien définie sur $]0, +\infty[$. On note que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt$, la fonction g est impaire et d'autre part $g(0)$ existe et vaut 0. La fonction g est alors définie sur $\mathbb{R}$.

Q10. Soit $x > 0$. En posant $t = ux$, on obtient

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x^2 u^2} e^{ixu} x du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} e^{ixu} du.$$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} e^{ixu} du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{ixu}|}{1 + u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = [\text{Arctan}(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $|g(x)| \leq \pi$. On a montré que la fonction g est bornée sur $]0, +\infty[$.

Q11. Posons $\Phi :]0, +\infty[\times] -\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, u) du$.

$$(x, u) \mapsto \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}$$

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \Phi(x, u)$ est continue par morceaux sur $] -\infty, +\infty[$.
- Pour tout $u \in] -\infty, +\infty[$, $\Phi(x, u) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + u^2} = \ell(u)$ et de plus, la fonction ℓ est continue par morceaux sur $] -\infty, +\infty[$.
- Pour tout $(x, u) \in]0, +\infty[\times] -\infty, +\infty[$, $|\Phi(x, u)| \leq \frac{1}{1 + u^2} = \varphi(u)$ où de plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ car est dominée par $\frac{1}{u^2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

D'après le théorème de passage à la limite dans une intégrale à paramètre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ existe dans $\mathbb{C}$ puis

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi.$$

On a montré que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$.

Q12. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$. On pose cette fois-ci $\Psi : [\varepsilon, A] \times] -\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ de sorte que

$$(x, t) \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$$

pour tout $x \in [\varepsilon, A]$, $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, t) dt$.

Pour tout $t \in] -\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Psi(x, t)$ est de classe C^2 sur $[\varepsilon, A]$. De plus, pour tout $(x, t) \in [\varepsilon, A] \times] -\infty, +\infty[$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, t) = \frac{(x^2 + t^2) - x(2x)}{(x^2 + t^2)^2} e^{it} = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it}$ puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{(-2x)(x^2 + t^2)^2 - (t^2 - x^2)2(2x)(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^4} e^{it} = \frac{(-2x)(x^2 + t^2) - (t^2 - x^2)2(2x)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it} \\ &= \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}.\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $x \in [\varepsilon, A]$, la fonction $t \mapsto \Psi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ d'après la question **Q9**. Ensuite, pour tout $x \in [\varepsilon, A]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $] -\infty, +\infty[$ et est dominée en $-\infty$ et $+\infty$ par la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}$ et est donc intégrable sur $] -\infty, +\infty[$.

Enfin, pour tout $(x, t) \in [\varepsilon, A] \times] -\infty, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2x(3x^2 + 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} = \frac{6x}{(x^2 + t^2)^2} \leq \frac{6A}{(\varepsilon^2 + t^2)^2} = \psi(t)$$

De plus, la fonction ψ est continue par morceaux sur $] -\infty, +\infty[$ et vérifie $\psi(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$. La fonction φ est donc intégrable sur $] -\infty, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction g est de classe C^2 sur $[\varepsilon, A]$ et ses dérivées d'ordre 1 et 2 s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$, on a montré que la fonction g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt.$$

Q13. On a déjà vu que pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times] -\infty, +\infty[$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2 + t^2)^3}$. D'autre part, pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times] -\infty, +\infty[$, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{-2xt}{(x^2 + t^2)^2}$ puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) &= \frac{-2x(x^2 + t^2)^2 - (-2xt)2(2t)(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^4} = \frac{(-2x)(x^2 + t^2) + 8xt^2}{(x^2 + t^2)^3} \\ &= \frac{-2x^3 + 6xt^2}{(x^2 + t^2)^3}.\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times] -\infty, +\infty[$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt$. Soit $x > 0$.

Les deux fonctions $t \mapsto -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right)$ et $t \mapsto e^{it}$ sont de classe C^1 sur $] -\infty, +\infty[$. Au vu de la convergence des deux intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$g''(x) = \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt.$$

De plus, $\left| -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} \right| = \frac{2x|t|}{(x^2 + t^2)^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o(1)$ et donc $\left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Il reste

$g''(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt$. Une nouvelle intégration par parties, licite, fournit :

$$\begin{aligned}
g''(x) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt \\
&= i \left[\frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right]_{-\infty}^{+\infty} - i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

On a montré que la fonction g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

Q14. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 - 1 = 0$. Cette équation caractéristique admet pour racines simples les deux nombres $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Il existe donc deux nombres complexes λ et μ tels que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

Si $\lambda \neq 0$, $|g(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} |\lambda| e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui contredit le caractère borné de la fonction g sur $]0, +\infty[$ établi à la question

Q10. Donc, $\lambda = 0$. Mais alors, $\mu = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$. On a montré que

$$\forall x > 0, g(x) = \pi e^{-x}.$$

Partie II - Formule sommatoire de Poisson

Q15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$ existe puis $f(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$. Donc, la série de terme général $f(x+n)$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x-n) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ existe puis $f(x-n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$. Donc, la série de terme général $f(x-n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Ceci montre que $F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+(n+1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-(n-1)) = \sum_{p=1}^{+\infty} f(x+p) + \sum_{p=0}^{+\infty} f(x-p) = \sum_{p=1}^{+\infty} f(x+p) + f(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} f(x-p) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} f(x+p) + \sum_{p=1}^{+\infty} f(x-p) = F(x).
\end{aligned}$$

La fonction F est 1-périodique.

Q16. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, posons $g_n(x) = f(x+n) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, posons $h_n(x) = f(x-n) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| = \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$ et donc $\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{1+n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{1+n^2}$ converge et il en est de même de la série de terme général $\|g_n\|_\infty$. On en déduit que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement et en particulier uniformément sur $[0, 1]$. Puisque chaque fonction g_n est continue sur $[0, 1]$, la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|h_n(x)| = \frac{1}{1+(x-n)^2} \leq \frac{1}{1+(n-1)^2}$ et donc $\|h_n\|_\infty \leq \frac{1}{1+(n-1)^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{1+(n-1)^2}$ converge et il en est de même de la série de terme général $\|h_n\|_\infty$. On en déduit que la série de fonctions de terme général h_n converge normalement et en particulier uniformément sur $[0, 1]$. Puisque chaque fonction h_n est continue sur $[0, 1]$, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.

Mais alors, la fonction $F = g + h$ est continue sur $[0, 1]$. Finalement, par 1-périodicité, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On reprend les notations de la question précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $t \in [0, 1]$, $|g_n(t)e^{-2ikt}| = |g_n(t)| \leq \|g_n\|_\infty$ et $|h_n(t)e^{-2ikt}| = |h_n(t)| \leq \|h_n\|_\infty$. Donc, les séries de fonctions de termes généraux respectifs $t \mapsto g_n(t)e^{-2ikt}$ et $t \mapsto h_n(t)e^{-2ikt}$ sont normalement et en particulier uniformément convergente sur le segment $[0, 1]$. De plus, toutes ces fonctions sont continues sur ce segment.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 F(t)e^{-2ikt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2ik\pi t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n)e^{-2ik\pi t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2ik\pi(u-n)} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-(n-1)} f(u)e^{-2ik\pi(u-n)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2ik\pi u} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-(n-1)} f(u)e^{-2ik\pi u} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-2ik\pi u} dt + \int_{-\infty}^0 f(u)e^{-2ik\pi u} dt \text{ (car les deux intégrales convergent)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2ikt} dt. \end{aligned}$$

Q18. Soit $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$. Si $n+k \neq 0$, $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)} \right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi(n+k)} - 1}{-2i\pi(n+k)} = 0$. D'autre part, si $n+k = 0$ ou encore si $n = -k$, $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \int_0^1 dt = 1$. En résumé,

$$\forall (n, k) \in \mathbb{Z}^2, \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \delta_{n, -k}.$$

Partie III - Applications

Q19. D'après la question **Q17.**, $c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En posant $u = -2k\pi t$,

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ik\pi t}}{1+t^2} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{iu}}{1+\left(-\frac{u}{2k\pi}\right)^2} \times -\frac{du}{2k\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2k\pi}{(2k\pi)^2 + u^2} e^{iu} du = g(2k\pi) \\ &= \pi e^{-2k\pi} \text{ (d'après la question Q14).} \end{aligned}$$

En tenant compte de $c_0(F) = \pi$ et du résultat admis par l'énoncé, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(F) = \pi e^{-2|k|\pi}$.

Q20. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = c_n(F)e^{2i\pi nx}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons $v_n(x) = c_{-n}(F)e^{-2i\pi nx}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| = c_n(F) = \pi e^{-2n\pi}$ puis $\|u_n\|_\infty = \pi e^{-2n\pi}$. De même, $\|v_n\|_\infty = \pi e^{-2n\pi}$. La série géométrique de terme général $\pi e^{-2n\pi} = \pi (e^{-2\pi})^n$ converge (car $e^{-2\pi} \in]-1, 1[$) et donc les séries de fonctions de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$. Puisque toutes les fonctions

u_n et toutes les fonctions v_n sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et $v : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $G = u + v$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $G(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)e^{2i\pi n(x+1)+2i\pi n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)e^{-2i\pi n(x+1)-2i\pi n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)e^{-2i\pi nx} = G(x)$.

Donc, la fonction G est 1-périodique.

Q21. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $c_k(G) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i(n-k)\pi t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i(n+k)\pi t} \right) dt$. En prenant cette fois-ci $u_n : t \mapsto c_n(F) e^{2i(n-k)\pi t}$ et $v_n : t \mapsto c_{-n}(F) e^{-2i(n+k)\pi t}$, comme à la question précédente, les séries de fonctions de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment et la question **Q14**,

$$c_k(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \int_0^1 e^{2i(n-k)\pi t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \int_0^1 e^{-2i(n+k)\pi t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \delta_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \delta_{n,-k}.$$

Mais alors, si $k \geq 0$, $c_k(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \delta_{n,k} + 0 = c_k(F)$ et si $k < 0$, $c_k(G) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \delta_{n,-k} = c_k(F)$. On a montré que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(G) = c_k(F)$.

Ainsi, F et G sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 1-périodiques telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(F) = c_k(G)$. D'après le résultat admis par l'énoncé, $F = G$.

Q22. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2in\pi x} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2in\pi x} = \pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n\pi + 2in\pi x} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n\pi - 2in\pi x} \right) \\ &= \pi \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2\pi + 2i\pi x})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2\pi - 2i\pi x})^n \right) \\ &= \pi \left(1 + \frac{e^{-2\pi + 2i\pi x}}{1 - e^{-2\pi + 2i\pi x}} + \frac{e^{-2\pi - 2i\pi x}}{1 - e^{-2\pi - 2i\pi x}} \right) \\ &= \pi \left(1 + \frac{e^{-2\pi + 2i\pi x} (1 - e^{-2\pi - 2i\pi x}) + e^{-2\pi - 2i\pi x} (1 - e^{-2\pi + 2i\pi x})}{(1 - e^{-2\pi + 2i\pi x}) (1 - e^{-2\pi - 2i\pi x})} \right) \\ &= \pi \left(1 + \frac{2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) - 2e^{-4\pi}}{1 - 2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) + e^{-4\pi}} \right) \\ &= \frac{\pi (1 - e^{-4\pi})}{1 - 2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) + e^{-4\pi}}. \end{aligned}$$