SESSION 2024

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\{X = k\} = \{X > k-1\} \setminus \{X > k\}$ avec $\{X > k\} \subset \{X > k-1\}$. Donc,

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k(P(X > k-1) - P(X > k)) = \sum_{k=1}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)P(X > \ell) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) \text{ (en posant } \ell = k-1 \text{ dans la première somme)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) \text{ (la variable de sommation étant muette)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=0}^{n-1} kP(X > k) - nP(X > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k)P(X > k) - nP(X > n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) \quad (*).
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant nP(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$. Puisque la série de terme général $kP(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} nP(X > n) = 0$.

D'après l'égalité $(*)$, on en déduit encore que la série de terme général $P(X > k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge puis, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Q2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, notons X_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Puisque les tirages se font avec remise, les variables X_i sont indépendantes et donc,

$$P(X \leqslant k) = P\left(\{X_1 \leqslant k\} \cap \ldots \cap \{X_p \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^{p} P\left(X_i \leqslant k\right) = \prod_{k=1}^{p} \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Ensuite, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ puis $P(X = 1) = P(X \leqslant 1) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^p$ puis, pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p,$$

ce qui reste vrai quand $k = 1$. Donc,

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p,$$

Q3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^p$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc, la somme de RIEMANN à pas constant $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci fournit explicitement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\ dx = \frac{1}{p+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question Q1, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. Ensuite, d'après le début de la question

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{p+1} + o(1)$$

puis

$$E(X) \underset{n \to +\infty}{=} n - \frac{n}{p+1} + o(n) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{pn}{p+1} + o(n).$$

Ceci montre que $E(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{pn}{p+1}$.

EXERCICE II

Q4. Sur I, l'équation (H) s'écrit : $y'' + \dfrac{4}{x}y' + \left(\dfrac{2}{x^2} - 1\right)y = 0$. Les deux fonctions $a : x \mapsto \dfrac{4}{x}$ et $b : x \mapsto \dfrac{2}{x^2} - 1$ sont continues sur I. On sait alors que $S_I(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Q5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle on suppose a priori $R_a > 0$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Puisque la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, f est deux fois dérivable sur $]-R_a, R_a[$ et pour $x \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned}
x^2 f''(x) + 4xf'(x)à + \left(2 - x^2\right) f(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \left(2 - x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 4n + 2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 + 3n + 2\right) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 2a_0 + 6a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}\right) x^n
\end{aligned}$$

puis, toujours sous l'hypothèse $R_a > 0$,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-R_a, R_a[,\ x^2 f''(x) + 4xf'(x)\text{à} + \left(2-x^2\right) f(x) = 1\\
&\qquad\Leftrightarrow \forall x \in]-R_a, R_a[,\ 2a_0 + 6a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}\right) x^n = 1\\
&\qquad\Leftrightarrow 2a_0 = 1 \text{ et } 6a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ (n+2)(n+1)a_n - a_{n-2} = 0\\
&\qquad\text{(par unicité des coefficients d'une série entière)}\\
&\qquad\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = 0\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad (*).
\end{aligned}$$

Ensuite, $(*) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$ et $a_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+2)(2p+1)}$ puis

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+2)(2p+1)}\\
&\qquad\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)\times\ldots\times 4\times 3} \times a_0\\
&\qquad\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}.
\end{aligned}$$

En résumé, sous l'hypothèse $R_a > 0$, f est solution de (E) sur $]-R_a, R_a[$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = 0$. Maintenant, pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leqslant \frac{|x|^n}{(n+2)!}$ (que n soit pair ou impair). On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ d'après un théorème de croissances comparées et d'après le théorème des gendarmes puis que $R_a = +\infty$.

Ceci valide tous les calculs précédents sur $\mathbb{R}$ et donc, il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et une seule, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, à savoir la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}.$$

De plus, pour $x > 0$,

$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x) - 1$$

et donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q6. Vérifions que la famille (g, h) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha g + \beta h = 0$ $(**)$. $\frac{\mathrm{sh}(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Si $\beta \neq 0$, $|\alpha g(x) + \beta h(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |\beta| \frac{\mathrm{sh}(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. Ceci contredit $(**)$ et donc $\beta = 0$. Il reste $\alpha g = 0$ puis $\alpha = 0$ car g n'est pas la fonction nulle.

Ainsi, la famille (g, h) est une famille libre d'éléments de $S_I(H)$. Puisque $S_I(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, la famille (g, h) est une base de $S_I(H)$. On en déduit que

$$S_I(H) = \left\{x \mapsto -\lambda \frac{1}{x^2} + \mu \frac{\mathrm{sh}(x)}{x^2},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Q7. $S_{\mathbb{R}}(H)$ est un espace vectoriel. Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mu_1\,\mathrm{sh}(x) - \lambda_1}{x^2} \text{ si } x > 0\\[2mm] \dfrac{\mu_2\,\mathrm{sh}(x) - \lambda_2}{x^2} \text{ si } x < 0 \end{array}\right. .$$

Ensuite, $f(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} -\dfrac{\lambda_1}{x^2}+\dfrac{\mu_1}{x}+o(1)$. Si $\lambda_1\neq 0$ ou $\mu_1\neq 0$, f n'a pas de limite réelle en 0 et n'est donc même pas continue en 0. Donc, nécessairement, $\lambda_1=\mu_1=0$. De même, nécessairement, $\lambda_2=\mu_2=0$ puis, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=0$ et finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$ par continuité de f en 0.

Réciproquement, la fonction nulle est solution de l'équation (H) sur $\mathbb{R}$ puis $S_{\mathbb{R}}(H)=\{0\}$. Mais alors, $S_{\mathbb{R}}(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 0.

PROBLEME

Q8. Question préliminaire.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge puis, en posant $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$,

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\ \text{(car les deux séries convergent)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{4}S+\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{3}{4}S=\dfrac{\pi^2}{8}$ puis que $S=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2}{6}$. On a montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I

Q9. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f\ :\ x\mapsto(\sin(x))^{n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=(n+1)(\sin(x))^n\cos(x)$.

Les deux fonctions $u\ :\ x\mapsto-\cos(x)$ et $v\ :\ x\mapsto(\sin(x))^{n+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}W_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\times(\sin(x))^{n+1}\\&=\left[-\cos(x)(\sin(x))^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos(x)\times(n+1)(\sin(x))^n\cos(x)\ dx=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin^n(x)\ dx\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2(x)\right)\sin^n(x)\ dx\\&=(n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\ dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(x)\ dx\right)\ \text{(par linéarité de l'intégration)}\\&=(n+1)\left(W_n-W_{n+2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit encore que $(n+2)W_{n+1}=(n+1)W_n$ puis que $.W_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}W_n$. On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n.$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $W_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}W_{2n-1}$. En tenant compte de $W_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\ dx=1$, on en déduit que pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times W_1 = \frac{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)\times\ldots\times 4\times 3\times 2}\times 1\\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q10. Soit $x \in]-1,1[$. Alors, $-x^2 \in]-1,1[$ puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(1+(-x^2)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-x^2\right)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.\end{aligned}$$

De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\times\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!}\\ &= \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!} = \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)\times(2\times 4\times\ldots\times(2n))}{2^n n!\times(2\times 4\times\ldots\times(2n))} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Ensuite, on sait que si f est la fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec $R_a > 0$, f admet sur $]-R_a, R_a[$ des primitives, que ces primitives s'obtiennent par intégration terme à terme et si F est l'une d'elles, pour $x \in]-R_a, R_a[$,

$$F(x) = F(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

le rayon de la suite $\left(\frac{a_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant R_a. Ici, on obtient pour $x \in]-1,1[$,

$$\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(0)+\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Q11. On sait que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$. Soit $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Alors, $\sin(x) \in]-1,1[$ puis, d'après la question précédente,

$$x = \text{Arcsin}(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}.$$

Q12. Pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}$. Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction f, qui est continue par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1}\,dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ (d'après la question Q9)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2},\end{aligned}$$

et en particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)|\,dx < +\infty$.

En résumé,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction f et la fonction f est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)|\,dx < +\infty$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$.

Q13. Ceci fournit explicitement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'après la question préliminaire, on en déduit encore que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

Q14. Pour $x \in]-1,1[$, $x^2 \in]-1,1[$ puis $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^2\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. On en déduit encore que

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}.$$

Pour $x \in]0,1[$, posons $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = -\ln(x)x^{2n}$. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,1[$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f, qui est continue par morceaux sur $]0,1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon]0,1]$. Une intégration par parties, licite, fournit

$$\int_{\varepsilon}^{1} -\ln(x)x^{2n}\,dx = \left[-\ln(x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} -\frac{1}{x}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx = \frac{\ln(\varepsilon)\varepsilon^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2n}\,dx.$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(\varepsilon)\varepsilon^{2n+1} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, quand ε tend vers 0, on obtient la convergence de l'intégrale I_n et sa valeur :

$$I_n = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx < +\infty$. On peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Q15. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,t)\,dt$.

- Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- Pour chaque $(x,t) \in [0,+\infty[^2$, $|\Phi(x,t)| = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Q16. Soit $a > 0$. Pour chaque x de $[a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$, une dérivée partielle définie par :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

De plus,

- Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- Pour chaque $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,
- Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^3}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que la fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et de plus,

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

Q17. Soit $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{t\left(1+x^2t^2\right) - x^2t\left(1+t^2\right)}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\left(1-x^2\right)t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

On en déduit que pour $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\,dt = \frac{1}{x^2-1}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2t^2\right)\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{2\left(x^2-1\right)}\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2\left(x^2-1\right)}\ln\left(x^2\right)\\
&= \frac{\ln(x)}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Q18. D'après la question Q14,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1)-f(0) = f(1)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan}(t))^2\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

D'après la question préliminaire, on en déduit de nouveau que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

