SESSION 2024

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Racine cubique d'une matrice

Partie I - Etude d'un exemple

Q1. $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))X + \det(A) = X^2 - 9X + 8 = (X-1)(X-8)$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A + PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, 8)$.

Q2. Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$B^3 = A \Leftrightarrow B^3 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}B^3P = D \Leftrightarrow \left(P^{-1}BP\right)^3 = D.$$

Ainsi, B est une racine cubique de A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $P^{-1}BP$ est une racine cubique de D dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q3. Soit $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^3 = D$. Alors,

$$\Delta \times D = \Delta \times \Delta^3 = \Delta^4 = \Delta^3 \times \Delta = D \times \Delta.$$

Posons alors $\Delta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$D\Delta = \Delta D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ 8b & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8c \\ b & 8d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a \\ 8b = b \\ c = 8c \\ 8d = 8d \end{array} \right. \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow \Delta \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}).$$

Q4. Posons donc $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta^3 = D \Leftrightarrow \lambda^3 = 1 \text{ et } \mu^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ et } \mu = 2.$$

D admet dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique et une seule à savoir $\Delta = \mathrm{diag}(1, 2)$. Mais alors, d'après la question **Q2**, A admet dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique et une seule, à savoir $R = P\Delta P^{-1}$.

Partie II - Dans un plan euclidien

Q5. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée directe, M est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de r_θ, la rotation d'angle θ.

Q6. On a $\left(r_{\theta/3}\right)^3 = r_\theta$. On en déduit que si $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta/3) & \cos(\theta/3) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $R^3 = M$.

Q7. Une matrice orthogonale N de déterminant -1 est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une réflexion s. Puisque $s^2 = \mathrm{Id}$ et donc que $s^3 = s$, on a $N^3 = N$. Une racine cubique de N dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est N.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Q8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Une racine cubique de la matrice $H_p(\lambda)$ est la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt[3]{\lambda} \end{pmatrix}$.

Q9. Puisque A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_d, \dots, \lambda_d)$ où pour chaque $i \in [\![1, d]\!]$, λ_i apparaît p_i fois, p_i étant l'ordre de multiplicité de λ_i. On note que les nombres $\sqrt[3]{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, sont deux à deux distincts par injectivité de la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt[3]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[3]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[3]{\lambda_d}, \dots, \sqrt[3]{\lambda_d}\right)$ où pour chaque $i \in [\![1, d]\!]$, $\sqrt[3]{\lambda_i}$ apparaît p_i fois puis $R = P\Delta P^{-1}$. On a $R^3 = P\Delta^3 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Q10. A est inversible et n'admet donc pas 0 pour valeur propre. Ceci montre que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, sont non nuls.

Q11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = \lambda$. Alors, $z \neq 0$ et on peut poser $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = \lambda \Leftrightarrow r^3 e^{3i\alpha} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow r^3 = \rho \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 3\alpha = \theta + 2k\pi \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\rho} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/\ \alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Les solutions de l'équation $z^3 = \lambda$ dans $\mathbb{C}$ sont les nombres de la forme $z_k = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3} + \frac{2ik\pi}{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z_{k+3} = z_k$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = \lambda$, sont les nombres z_0, z_1 et z_2. Enfin, ces nombres sont deux à deux distincts car non nuls et d'arguments deux à deux distincts modulo 2π. L'équation $z^3 = \lambda$ admet donc dans $\mathbb{C}$ exactement trois solutions : z_0, z_1 et z_2.

Q12. Si k et ℓ sont deux éléments distincts de $[\![1, d]\!]$ tel que $k \neq \ell$, alors $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ puis l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = \lambda_k$ et l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = \lambda_\ell$ sont disjoints. Par suite, le polynôme Q se décompose en un produit de $3d$ polynômes de degré 1 deux à deux distincts ou encore Q est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.

Q13. Soit B une racine cubique de A. $Q(B) = \displaystyle\prod_{k=1}^{d} \left(B^3 - \lambda_k I_n\right) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n)$. Puisque A est diagonalisable, on sait que le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ est annulateur de A et donc $Q(B) = 0$.

Mais alors, Q est un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples et annulateur de B. On en déduit que B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2

La fonction $\ln(\Gamma)$

Partie I - Existence de la solution du problème posé

Q14. Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ensuite,

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque $2 > 1$, la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Il en est de même de la série numérique de terme général $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série numérique de terme général $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge ou encore la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n + x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n + x} \\ &= \frac{x}{n(n + x)} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$. De plus, $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc la série numérique de terme général ε_n est absolument convergente.

Q16. Soit $[a,b]$ ($a<b$), un segment contenu dans $]0,+\infty[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in[a,b]$,

$$|u_n'(x)| = \left|\frac{x}{n(n+x)}+\varepsilon_n\right| \leqslant \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n| \leqslant \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|,$$

puis $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$.

Puisque $\dfrac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série numérique de terme général $\dfrac{b}{n(n+a)}$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge. Mais alors, la série numérique de terme général $\dfrac{b}{n(n+a)}+|\varepsilon_n|$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge et il en est de même de la série numérique de terme général $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$.

On a montré que la série de fonctions de terme général u_n', $n\in\mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[a,b]$.

Q17. Ainsi, si $[a,b]$ est un segment contenu dans $]0,+\infty[$,

- chaque fonction u_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $[a,b]$,
- la série de fonctions de terme général u_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction $u\ :\ x\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$,
- la série de fonctions de terme général u_n', $n\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction u est de classe C^1 sur $[a,b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$, la fonction u est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et il en est de même de la fonction $\varphi\ :\ x\mapsto -\ln(x)+u(x)$. Ceci montre que la fonction φ vérifie (i).

$\varphi(1) = -\ln(1) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0$. Donc, la fonction φ vérifie (iv).

Soit $x>0$. Alors, $x+1>0$ puis

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1)-\varphi(x) &= -\ln(x+1)+\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\
&= -\ln(x+1)+\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n+1}{x+n}\right)\right)\\
&= -\ln(x+1)+\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((\ln(n+1)-\ln(x+n+1)) - (\ln(n)-\ln(x+n))\right)\\
&= -\ln(x+1)+\ln(x)+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left((\ln(n+1)-\ln(x+n+1)) - (\ln(n)-\ln(x+n))\right)\\
&= -\ln(x+1)+\ln(x)+\lim_{N\to+\infty}\left((\ln(N+1)-\ln(x+N+1)) - (\ln(1)-\ln(x+1))\right)\\
&\text{(somme télescopique)}\\
&= \ln(x) + \lim_{N\to+\infty}\ln\left(\frac{N+1}{N+1+x}\right) = \ln(x)+\ln(1)\\
&= \ln(x)
\end{aligned}$$

Donc, la fonction φ vérifie (ii).

Soit $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ tel que $x\leqslant y$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(y)-\varphi'(x) &= -\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(u_n'(y)-u_n'(x)\right) = -\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n+y}+\frac{1}{n+x}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n+y}+\frac{1}{n+x}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < n+x \leqslant n+y$ puis $\dfrac{1}{n+x} \geqslant \dfrac{1}{n+y}$ et donc $-\dfrac{1}{n+y} + \dfrac{1}{n+x} \geqslant 0$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\varphi'(y) - \varphi'(x) \geqslant 0$ ou encore $\varphi'(x) \leqslant \varphi'(y)$.

Ainsi, la fonction φ' est croissante sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction φ vérifie la condition (iii).

Partie II - Unicité de la solution

Q18. Soit $x > 0$. $h(x+1) = \varphi(x+1) - g(x+1) = (\varphi(x) + \ln(x)) - (g(x) + \ln(x)) = \varphi(x) - g(x) = h(x)$. Ensuite, la fonction h est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. En dérivant, on obtient pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h'(x+1) = h'(x)$.

Q19. Soit $x \in]0, 1]$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$. Les fonctions φ' et g' étant croissante sur $]0, +\infty[$, on a $\varphi'(p) \leqslant \varphi'(x+p) \leqslant \varphi'(p+1)$ et $-g'(p+1) \leqslant -g'(x+p) \leqslant -g'(p)$ puis

$$\varphi'(p) - g'(p+1) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(p+1) - g'(p) \quad (1).$$

Ensuite,

$$\varphi'(p) - g'(p+1) = \varphi'(p) - g'(p) + g'(p) - g'(p+1) = h'(p) - \ln'(p) = h'(p) - \frac{1}{p} \quad (2).$$

On retranche $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ aux trois membres de (1). On obtient

$$-\frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) - h'(p) \leqslant \varphi'(p+1) - \varphi'(p) = \frac{1}{p}$$

et finalement $|h'(x) - h'(p)| \leqslant \dfrac{1}{p}$.

Q20. Soit $x \in]0, 1]$. Puisque la fonction h' est 1-périodique, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|h'(x) - h'(0)| = |h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \dfrac{1}{p}$. Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $h'(x) = h'(0)$.

Ainsi, la fonction h' est constante sur $]0, 1]$ puis sur $]0, +\infty[$ par 1-périodicité.

Q21. La fonction h est donc affine sur $]0, +\infty[$. Puisque $h(1) = h(2)$ par 1-périodicité, la fonction h est constante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $h(x) = h(1) = 0$ et donc que $h = 0$. Mais alors, $g = \varphi$.

Partie III - La formule de duplication

Q22. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\right) \\
&= \sqrt{\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}} \times \prod_{n=1}^{N}\frac{2n}{2n+1} \\
&= \sqrt{N+1} \times \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2N)}{3 \times 5 \ldots \times (2N-1) \times \times (2N+1)} \text{ (produit télescopique)} \\
&= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{(2 \times 4 \times \ldots \times (2N))^2}{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2N)} \\
&= \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}.
\end{aligned}$$

Q23. D'après la formule de Stirling,

$$\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \times \frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{N}} \times 2^{2N}\left(\frac{N}{e}\right)^{2N} \times 2N\pi \times \left(\frac{e}{2N}\right)^{2N}\frac{1}{\sqrt{4N\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(\pi)-\ln(2)$ puis

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln(\pi)-\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Enfin, $\psi(1) = \varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\ln(\pi) = 0$.

Q24. Pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{x}{2} > 0$ et $\dfrac{x+1}{2} > 0$. Donc la fonction ψ vérifie la condition (i). La fonction ψ vérifie la condition (iv) d'après la question précédente. Ensuite, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Psi(x+1)-\psi(x) &= \ln(2)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+2}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x+2}{2}\right)\\ &= \ln(2)+\varphi\left(\frac{x}{2}+1\right)-\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(2)+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \ln(x).\end{aligned}$$

Donc, la fonction ψ vérifie la condition (ii). Enfin, pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = \ln(2)+\dfrac{1}{2}\varphi'\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\varphi'\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$. La fonction ψ' est donc croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions croissantes sur $]0,+\infty[$ puis la fonction ψ vérifie la condition (iii).

Par unicité, $\psi = \varphi$ ou encore,

$$\forall x > 0,\ (x-1)\ln(2)+\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x)+\frac{1}{2}\ln(\pi).$$

EXERCICE 3
Temps d'attente avant une collision

Partie I - Une expression de l'espérance de T_n

Q25. D'après le principe des tiroirs, au plus tard au $(n+1)$-ème tirage, on aura obtenu deux numéros identiques. Donc, $T_n(\Omega) \subset [\![2, n+1]\!]$. D'autre part, pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X_1 = 1)\cap(X_2 = 2)\cap\ldots(X_{k-1} = k-1)\cap(X_k = k-1)\cap(X_{k+1} = 1)\cap\ldots(X_{n+1} = 1)$ est contenu dans l'événement $(T_n = k)$ qui n'est donc pas vide. On en déduit que $T_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

Q26. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Les tirages successifs se font avec remise. Donc, les variables X_1, ..., X_k, sont indépendantes. Par suite, pour tout $(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1, n]\!]^k$,

$$P\left(Z = (i_1,\ldots,i_k)\right) = P\left((X_1 = i_1)\cap\ldots\cap(X_k = i_k)\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(X_j = i_j\right) = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}.$$

Donc, la variable aléatoire Z suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^k$.

Q27. A est l'ensemble des k-listes d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. On sait alors que $\text{card}(A) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. L'événement $(T_n > k)$ est réalisé si et seulement si les variables X_1, ..., X_k prennent des valeurs deux à deux distinctes ce qui équivaut au fait que l'événement $(Z \in A)$ est réalisé. Puisque Z suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^k$,

$$P\left(T_n > k\right) = P(Z \in A) = \frac{\text{card}(A)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{1}{n^k}.$$

Q28.

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(T_n = k) \text{ (car } P(T_n = 1) = 0) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}\left(\sum_{\ell=1}^{k} P(T_n = k)\right) = \sum_{\ell=1}^{n+1}\left(\sum_{k=\ell}^{n+1} P(T_n = k)\right) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(T_n > \ell - 1) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} P(T_n > \ell) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!} \times \frac{1}{n^\ell}.
\end{aligned}$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Q29. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $t^2 \times t^k e^{-t} = t^{k+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées puis $t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque $2 > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Il en est de même de la fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ et donc l'intégrale I_k est une intégrale convergente.

Q30. $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence des deux intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$I_{k+1} = \left[t^{k+1}\left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (k+1)t^k\left(-e^{-t}\right) dt = -\lim_{t\to+\infty} t^{k+1}e^{-t} + (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt = (k+1)I_k.$$

Mais alors, par récurrence et en tenant compte de $I_0 = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in [0, +\infty[$,

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} t^k e^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$ et est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt$ est une intégrale convergente puis, par linéarité

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \times k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = E(T_n) \text{ (d'après la question } \mathbf{Q28}).
\end{aligned}$$

Partie III - Une équivalent de l'espérance

III.1 - Etude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = n\left(1 + \frac{v}{n}\right)$ de sorte que $1 + \frac{t}{n} = 2 + \frac{v}{n}$, $dt = dv$ et $v = n\left(\frac{t}{n} - 1\right)$, on obtient

$$J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right) e^{-(n+v)}\, dv = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right) e^{-v}\, dv.$$

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $v \in [0, +\infty[$, $1 + \frac{v}{2n} \leqslant e^{\frac{v}{2n}}$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$, on a encore $\left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leqslant e^{\frac{v}{2}}$ puis

$$0 \leqslant K_n \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\, dv \leqslant \int_0^{+\infty} e^{\frac{v}{2}} \times e^{-v}\, dv = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}}\, dv = \left[-2e^{-\frac{v}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant K_n \leqslant 2$. La suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leqslant J_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{v}{2n}\right)^n \, dv \leqslant 2 \times \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Puisque $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

III.2 - Etude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = u\sqrt{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \, dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u\sqrt{n}}{n}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \sqrt{n} du = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \, du \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) \, du = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) \, du + \sqrt{n}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u) \, du \\
&= \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u) \, du.
\end{aligned}$$

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$, $\left|\frac{u}{\sqrt{n}}\right| < 1$ et donc

$$\begin{aligned}
\ln(f_n(u)) &= -u\sqrt{n} + n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \\
&= -u\sqrt{n} + n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k = -u\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.
\end{aligned}$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$, $\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} = \sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$.

Soit $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$. Pour $k \geqslant 3$, posons $v_k = \frac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}}$. Pour tout $k \geqslant 3$,

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{ku}{(k+1)\sqrt{n}} \leqslant \frac{(k+1)\sqrt{n}}{(k+1)\sqrt{n}} = 1$$

puis $v_{k+1} \leqslant v_k$. La suite $(v_k)_{k\geqslant 3}$ est décroisante. D'autre part, pour tout $k \geqslant 3$, $0 \leqslant v_k \leqslant \frac{\sqrt{n}^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}} = \frac{n}{k}$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 0$.

Ainsi, pour tout $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$, la suite $\left((-1)^{k-1}\frac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}}\right)_{k\geqslant 3}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Pour tout $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$, la série de terme général $(-1)^{k-1}\frac{u^k}{kn^{\frac{k}{2}-1}}$, $k \geqslant 3$, est une série alternée. On sait que la valeur absolue de sa somme est majorée en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme, ce qui fournit pour tout $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$,

$$\left|\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \left|(-1)^{3-1}\frac{u^3}{3n^{\frac{3}{2}-1}}\right| = \frac{u^3}{3\sqrt{n}}.$$

On en déduit encore que pour $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$,

$$\ln\left(f_n(u)\right) \leqslant -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leqslant -\frac{u^2}{2} + \frac{u^2\sqrt{n}}{3\sqrt{n}} = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{3} = -\frac{u^2}{6}.$$

Q38. La fonction $g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $u \in [0, +\infty[$. Pour $n > u^2$, $f_n(u) = \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}$. Par suite,

$$f_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-u\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}-\frac{u^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-u\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{u^2}{2}+o(1)}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \left]0, \sqrt{n}\right[$, $|f_n(u)| = f_n(u) = e^{\ln(f_n(u))} \leqslant e^{-\frac{u^2}{6}}$ ce qui reste vrai si $u \geqslant \sqrt{n}$ car dans ce cas, $f_n(u) = 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in [0, +\infty[$, $|f_n(u)| \leqslant e^{-\frac{u^2}{6}} = \varphi(u)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En résumé,

- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ et la fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in [0, +\infty[$, $|f_n(u)| \leqslant \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$),
- (f est intégrable sur $[0, +\infty[$),
- la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$.

Plus explicitement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

III.3 - Conclusion

Q39. D'après les question **Q35** et **Q38**, $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\dfrac{\pi n}{2}} + o\left(\sqrt{n}\right)$. D'après la question **Q34**, $J_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et en particulier, $J_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$.

Mais alors, d'après la question **Q31**,

$$E\left(T_n\right) = I_n + J_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + o\left(\sqrt{n}\right)$$

ou encore

$$E\left(T_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

