
 MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1.

$$\begin{aligned}
 \chi_A &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ X+2 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\
 &= (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \quad (\text{par linéarité par rapport à la première colonne}) \\
 &= (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X-2 & 4 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
 &= (X+2)(X^2 + X - 2) = (X-1)(X+2)^2.
 \end{aligned}$$

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_A est scindé sur \mathbb{R} et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. De plus, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours de dimension 1.

Ici, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\dim(E_{-2}(A)) = 2$ ce qui équivaut à $\text{rg}(A + 2I_3) = 1$. Or,

$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est effectivement de rang 1 car, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A + 2I_3$, $C_1 \neq 0$,

$C_2 = -C_1$ et $C_3 = C_1$. Par suite, il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où $D = \text{diag}(-2, -2, 1)$.

$E_{-2}(A)$ est le plan d'équation $-x + y - z = 0$. Donc, $E_{-2}(A) = \text{Vect}(U_1, U_2)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
 X \in E_1(A) &\Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4z \\ -5x + 2(x + 4z) - 2z = 0 \\ -2x + (x + 4z) - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4z \\ -3x + 6z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 6z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, $E_1(A) = \text{Vect}(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}X_n$ puis $P^{-1}X_{n+1} = DP_{-1}X_n$ et donc $Y_{n+1} = DY_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(-2)^n \\ \beta_0(-2)^n \\ \gamma_0 \end{pmatrix},$$

puis

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(-2)^n \\ \beta_0(-2)^n \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \beta_0)(-2)^n + 2\gamma_0 \\ \alpha_0(-2)^n + 6\gamma_0 \\ -\beta_0(-2)^n + \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Les u , v et w convergent toutes les trois si et seulement si $\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_0 = -\beta_0 = 0$ ce qui équivaut à $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 + 2\gamma_0 = u_0 \\ \alpha_0 + 6\gamma_0 = v_0 \\ -\beta_0 + \gamma_0 = w_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -6\gamma_0 + v_0 \\ \beta_0 = \gamma_0 - w_0 \\ (-6\gamma_0 + v_0) + (\gamma_0 - w_0) + 2\gamma_0 = u_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 = \frac{1}{3}(-u_0 + v_0 - w_0) \\ \alpha_0 = -2(-u_0 + v_0 - w_0) + v_0 \\ \beta_0 = \frac{1}{3}(-u_0 + v_0 - w_0) - w_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 = \frac{1}{3}(-u_0 + v_0 - w_0) \\ \alpha_0 = 2u_0 - v_0 + 2w_0 \\ \beta_0 = \frac{1}{3}(-u_0 + v_0 - 4w_0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, les suites u , v et w convergent simultanément si et seulement si $2u_0 - v_0 + 2w_0 = -u_0 + v_0 - 4w_0 = 0$ ce qui équivaut à $u_0 = 2w_0$ et $v_0 = 6w_0$ ou encore à $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$. Dans ce cas, les suites u , v et w sont constantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0, v_n = v_0 \text{ et } w_n = w_0.$$

EXERCICE II

Q3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \leq 0$, $e^{-x\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc, la série numérique de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.

• Si $x > 0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ car $-x\sqrt{n} + 2\ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha = 2 > 1$). Il en est de même de la série numérique de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$.

Finalement, le domaine de définition de la fonction f est $D =]0, +\infty[$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Soit $a > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} = f_n(a)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$. Puisque la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, on déduit que la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Ainsi, chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[a, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

Q5. La série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $[1, +\infty[$. De plus, chaque fonction f_n a une réelle ℓ_n en $+\infty$ à savoir $\ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction f a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

Q6. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-x\sqrt{n}} = \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{n}} dx \geq \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$ puis

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

On a montré que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$.

Q7. Soit $x > 0$. En posant $u = x\sqrt{t}$ de sorte que $t = \frac{u^2}{x^2}$ puis $dt = \frac{2u}{x^2} du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \times \frac{2u}{x^2} du = \frac{2\Gamma(2)}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

D'après la question précédente, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1$ puis $1 \leq \frac{x^2 f(x)}{2} \leq 1 + \frac{x^2}{2}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x)}{2} = 1$ et donc que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

PROBLEME

Q8. A est symétrique réelle. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X^T A X &= (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix} = x(2x + y) + y(x + y) \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x + y)^2. \end{aligned}$$

On a donc $X^T A X \geq 0$ et de plus,

$$\begin{aligned} X^T A X = 0 &\Leftrightarrow x^2 + (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = (x + y)^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$ et donc A est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A est définie positive si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$. Démontrons ce résultat.

• Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Puisque $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on sait que χ_A est scindé sur \mathbb{R} d'après le théorème spectral. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X.$$

De plus, $X^T X = \|X\|_2^2 > 0$ car $X \neq 0$ et donc $\lambda = \frac{X^T A X}{X^T X} > 0$. On a montré que si A est symétrique réelle, définie positive, alors toute valeur propre de A dans \mathbb{C} est un réel strictement positif.

• Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Supposons que les valeurs propres soient des réels strictement positifs. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A . D'après le théorème spectral, on sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $X' = P^T X = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sorte que $X = PX'$ et on a

$$X^T A X = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) = X'^T D X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2.$$

Puisque les λ_i sont positifs, on a $X^T A X \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} X^T A X = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2 \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i x_i'^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i' = 0 \text{ (car les } \lambda_i \text{ sont tous nuls)} \\ &\Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$ puis A est définie positive.

Q10. $P(0) = -3 < 0$ et $P(1) = 1 > 0$. Puisque la fonction P est continue sur $[0, 1]$, la fonction P s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De même, $P(1) = 1 > 0$ et $P(3) = -3 < 0$ et donc, la fonction P s'annule au moins une fois dans $]1, 3[$. Enfin, $P(3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et donc la fonction P s'annule au moins une fois dans $]3, +\infty[$. En résumé, la fonction P s'annule en trois réels deux à deux distincts λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant

$$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 3 < \lambda_3.$$

Puisque P est un polynôme de degré 3, on a trouvé toutes les racines de P , toutes réelles, simples et strictement positives.

La matrice B est symétrique réelle. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X + 5) - (X-2) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P.$$

D'après ce qui précède, les valeurs propres de B sont des réels strictement positifs et donc B est définie positive.

Un critère en dimension 2

Q11. La trace (resp. le déterminant) d'une matrice est égale à la somme (resp. le produit) de ses valeurs propres (dans \mathbb{C}), chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset]0, +\infty[^n$ la famille des valeurs propres de M . Alors, $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ et

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0.$$

Q12. Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$. On note $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ la famille des valeurs propres de M . Puisque $\lambda_1 \lambda_2 = \det(M) > 0$, λ_1 et λ_2 sont deux réels non nuls et de même signe. Puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M) > 0$, ces deux réels sont strictement positifs. Mais alors, $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. En résumé,

$$\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Tr}(M) > 0 \text{ et } \det(M) > 0.$$

Q13. La matrice $D = \text{diag}(-1, -1, 3)$ vérifie $D \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D) = 1 > 0$ et $\det(D) = 3 > 0$. Pourtant, D n'est pas définie positive car D admet une valeur propre négative. La condition n'est plus suffisante au format $(3, 3)$.

Q14. La fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} . Donc, si la fonction f admet un extremum local en un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, ce point est un point critique de f . Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ 1 - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

La fonction f admet donc un point critique et un seul, le point $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{x y^3}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$. La matrice hessienne de f en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ est donc :

$$\text{Hf}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\text{Tr}(\text{Hf}(x_0, y_0)) = 4 > 0$ et que $\det(\text{Hf}(x_0, y_0)) = 3 > 0$, la matrice $\text{Hf}(x_0, y_0)$ est définie positive d'après la question **Q12**. On sait alors que la fonction f admet un minimum local en $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Ce minimum local est égal à $f(1, 1)$ c'est-à-dire 3.

Le critère de Sylvester

Q15. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On découpe alors la matrice

M en blocs : $M = \begin{pmatrix} M_k & C \\ B & D \end{pmatrix}$ où $M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$X^T M X = \begin{pmatrix} X_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k \\ B X_k \end{pmatrix} = X_k^T M_k X_k.$$

Q16. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Avec les notations de la question précédente, pour tout $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X > 0 \text{ car } X \neq 0.$$

Donc, $M_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$ puis $\det(M_k) > 0$ d'après la question **Q11**.

On a montré que si M est définie positive, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(M_k) > 0$.

Q17. $\det(Q) = \det(I_{n-1}) \times 1 = 1 \neq 0$ (déterminant par blocs) et donc Q est une matrice inversible.

Puisque par hypothèse, $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, 0 n'est pas valeur propre de M_{n-1} puis $M_{n-1} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Mais alors, $\text{Im}(M_{n-1}) = \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. En particulier, il existe $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V = -U$ ou encore $M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.

Un calcul par blocs fournit alors, en tenant compte de $M_{n-1}V + U = 0$ et $M_{n-1}^T = M_{n-1}$,

$$\begin{aligned} Q^T M Q &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T M_{n-1} + U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ (M_{n-1}V + U)^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^T V + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pose $\beta = U^T V + \alpha$ (β est un réel). Un calcul par blocs fournit

$$(\det(Q))^2 \det(M) = \det(Q^T M Q) = \det(M_{n-1}) \times \beta$$

et donc $\beta = \frac{(\det(Q))^2 \det(M)}{\det(M_{n-1})} > 0$.

Q18. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, « pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si M vérifie le critère de SYLVESTER, alors M est définie positive » (\mathcal{P}_n).

- Si $M = (\lambda) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie le critère de SYLVESTER, alors $\lambda > 0$ puis $M \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$. (\mathcal{P}_1) est vraie.
- Soit $n \geq 2$. Supposons (\mathcal{P}_{n-1}). Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de SYLVESTER. Avec les notations précédentes, M_{n-1} vérifie le critère de SYLVESTER puis M_{n-1} est définie positive par hypothèse de récurrence.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = Q^{-1}X$ de sorte que $X = QX'$. On écrit X' sous la forme $X' = \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ x' \end{pmatrix}$ où

$X'_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $x' \in \mathbb{R}$. Toujours avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} X^T M X &= (Q X')^T M Q X' = X'^T Q^T M Q X' = (X'_{n-1}^T \quad x') \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ x' \end{pmatrix} \\ &= (X'_{n-1}^T \quad x') \begin{pmatrix} M_{n-1} X'_{n-1} \\ \beta x' \end{pmatrix} = X'_{n-1}^T M_{n-1} X'_{n-1} + \beta x'^2. \end{aligned}$$

Puisque M_{n-1} est positive et β est positif, cette expression est positive. De plus,

$$\begin{aligned} X^T M X = 0 &\Rightarrow X'_{n-1}^T M_{n-1} X'_{n-1} + \beta x'^2 = 0 \\ &\Rightarrow X'_{n-1}^T M_{n-1} X'_{n-1} = \beta x'^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Rightarrow X'_{n-1} = 0 \text{ et } x' = 0 \text{ (car } M_{n-1} \text{ est définie positive et car } \beta \neq 0) \\ &\Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Donc, M est définie positive.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les trois mineurs de SYLVESTER sont $2 > 0$, $1 > 0$ et

$$\det(C(x)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 2(1-x^2) - 1 = 1 - 2x^2.$$

D'après le critère de SYLVESTER, $C(x) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$.

Q20. $\det(2) = 2 > 0$. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$. Ensuite, en développant suivant la dernière colonne,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 2 \times 3 + (-5) = -7 < 0.$$

D'après le critère de SYLVESTER, la matrice proposée n'est pas définie positive.

Q21. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on sait que

$$X^T A X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Soit alors $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$X^T A X = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz.$$

Or, $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$ et enfin,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} > 0.$$

D'après le critère de SYLVESTER, $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ et donc, pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^T A X > 0$.

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Delta_n = \det(S_n)$. On a déjà $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 2$. Soit $n \geq 1$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\Delta_{n+2} = \sqrt{3} \Delta_{n+1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \Delta_{n+1} - \Delta_n$$

en développant suivant la première ligne. Ainsi,

$$\Delta_1 = \sqrt{3}, \Delta_2 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \Delta_n.$$

Donc, $\Delta_3 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_4 = 1 > 0$, $\Delta_5 = 0$. Par suite, S_n est définie positive si et seulement si $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.