SESSION 2024

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ X+2 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\
&= (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \ \text{(par linéarité par rapport à la première colonne)} \\
&= (X+2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X-2 & 4 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= (X+2)\left(X^2+X-2\right) = (X-1)(X+2)^2.
\end{aligned}$$

A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. De plus, le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours de dimension 1.

Ici, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\dim\left(E_{-2}(A)\right) = 2$ ce qui équivaut à $\text{rg}\left(A+2I_3\right) = 1$. Or, $A+2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est effectivement de rang 1 car, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $A+2I_3$, $C_1 \neq 0$, $C_2 = -C_1$ et $C_3 = C_1$. Par suite, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où $D = \text{diag}(-2,-2,1)$.

$E_{-2}(A)$ est le plan d'équation $-x+y-z=0$. Donc, $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(U_1, U_2\right)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) &\Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x+2y-2z=0 \\ -6x+3y-6z=0 \\ -x+y-4z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5x+2y-2z=0 \\ -2x+y-2z=0 \\ -x+y-4z=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x+4z \\ -5x+2(x+4z)-2z=0 \\ -2x+(x+4z)-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x+4z \\ -3x+6z=0 \\ -x+2z=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2z \\ y=6z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc, $E_1(A) = \text{Vect}\left(U_3\right)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}X_n$ puis $P^{-1}X_{n+1} = DP_{-1}X_n$ et donc $Y_{n+1} = DY_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix} = Y_n = D^nY_0 = \begin{pmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0(-2)^n\\ \beta_0(-2)^n\\ \gamma_0\end{pmatrix},$$

puis

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0(-2)^n\\ \beta_0(-2)^n\\ \gamma_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha_0+\beta_0)(-2)^n + 2\gamma_0\\ \alpha_0(-2)^n + 6\gamma_0\\ -\beta_0(-2)^n + \gamma_0\end{pmatrix}.$$

Les u, v et w convergent toutes les trois si et seulement si $\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_0 = -\beta_0 = 0$ ce qui équivaut à $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Enfin,

$$\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_0+\beta_0+2\gamma_0 = u_0\\ \alpha_0 + 6\gamma_0 = v_0\\ -\beta_0+\gamma_0 = w_0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_0 = -6\gamma_0 + v_0\\ \beta_0 = \gamma_0 - w_0\\ (-6\gamma_0+v_0)+(\gamma_0-w_0)+2\gamma_0 = u_0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\gamma_0 = \dfrac{1}{3}(-u_0+v_0-w_0)\\ \alpha_0 = -2(-u_0+v_0-w_0)+v_0\\ \beta_0 = \dfrac{1}{3}(-u_0+v_0-w_0)-w_0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\gamma_0 = \dfrac{1}{3}(-u_0+v_0-w_0)\\ \alpha_0 = 2u_0 - v_0 + 2w_0\\ \beta_0 = \dfrac{1}{3}(-u_0+v_0-4w_0)\end{array}\right..$$

Ainsi, les suites u, v et w convergent simultanément si et seulement si $2u_0 - v_0 + 2w_0 = -u_0 + v_0 - 4w_0 = 0$ ce qui équivaut à $u_0 = 2w_0$ et $v_0 = 6w_0$ ou encore à $\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix} \in E_1(A)$. Dans ce cas, les suites u, v et w sont constantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0,\ v_n = v_0 \text{ et } w_n = w_0.$$

EXERCICE II

Q3. Instruction pour obtenir l'image de 1 par s :

```
s[1]
```

Liste qui représente la transposition $(2,3)$:

```
[0 1 3 2]
```

Q4. Fonction python renvoyant la liste représentant $\sigma_1 \circ \sigma_2$:

```python
def comp(s1, s2):
   return [s1[s2[k]] for k in range(len(s1))]
```

Q5. Fonction python renvoyant la liste représentant σ^{-1} :

```python
def inv(s):
   inverse_s=[0]*len(s)
   for k in range(len(s)):
      inverse_s[s[k]]=k
   return inverse_s
```


Q6. Fonction python qui teste si un sous-ensemble G de $\mathscr{S}_n$ est un sous-groupe de $(\mathscr{S}_n, \circ)$: on vérifie que $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]} \in G$ et que pour tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in G^2$, $\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} \in G$.

```python
def groupe(G):
    # les deux lignes suivantes permettent de définir n
    if len(G)==0:
        return False
    n=len(G[0])
    Identite=[k for k in range(n)]
    if Identite not in G:
        return False
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1,inv(s2)) not in G:
                return False
    return True
```

Q7. Fonction python renvoyant le groupe engendré par σ : $\mathrm{gr}(\sigma) = \left\{\sigma^k,\ k \in [\![1,p]\!]\right\}$ où $p = \mathrm{Min}\left\{k \in \mathbb{N}^* / \ \sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$.

```python
def cyclique(s):
    n=len(s)
    t=[k for k in range(n)]
    identite=[k for k in range(n)]
    G=[t]
    t=comp(s, t)
    while t!= identite:
        G.append(t)
        t=comp(s,t)
    return G
```

PROBLEME

Q8. A est symétrique réelle. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X^TAX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = x(2x+y) + y(x+y) \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2. \end{aligned}$$

On a donc $X^TAX \geqslant 0$ et de plus,

$$\begin{aligned} X^TAX = 0 &\Leftrightarrow x^2 + (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = (x+y)^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x+y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^TAX > 0$ et donc A est définie poitive.

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$. Démontrons ce résultat.

• Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Puisque $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$X^TAX = X^T(\lambda X) = \lambda X^TX.$$

De plus, $X^TX = \|X\|_2^2 > 0$ car $X \neq 0$ et donc $\lambda = \dfrac{X^TAX}{X^TX} > 0$. On a montré que si A est symétrique réelle, définie positive, alors toute valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est un réel strictement positif.

• Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Supposons que les valeurs propres soient des réels strictement positifs. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. D'après le théorème spectral, on sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $X' = P^T X = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sorte que $X = PX'$ et on a

$$X^T AX = X^T PDP^T X = \left(P^T X\right)^T D \left(P^T X\right) = X'^T DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2.$$

Puisque les λ_i sont positifs, on a $X^T AX \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
X^T AX = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i'^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x'_i = 0 \text{ (car les } \lambda_i \text{ sont tous nuls)} \\
&\Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = 0.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T AX > 0$ puis A est définie positive.

Q10. $P(0) = -3 < 0$ et $P(1) = 1 > 0$. Puisque la fonction P est continue sur $[0, 1]$, la fonction P s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De même, $P(1) = 1 > 0$ et $P(3) = -3 < 0$ et donc, la fonction P s'annule au moins une fois dans $]1, 3[$. Enfin, $P(3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ et donc la fonction P s'annule au moins une fois dans $]3, +\infty[$. En résumé, la fonction P s'annule en trois réels deux à deux distincts λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant

$$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 3 < \lambda_3.$$

Puisque P est un polynôme de degré 3, on a trouvé toutes les racines de P, toutes réelles, simples et strictement positives.

La matrice B est symétrique réelle. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2 - 5X + 5\right) - (X-2) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P.$$

D'après ce qui précède, les valeurs propres de B sont des réels strictement positifs et donc B est définie positive.

Un critère en dimension 2

Q11. La trace (resp. le déterminant) d'une matrice est égale à la somme (resp. le produit) de ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$), chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Soit $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset (]0, +\infty[)^n$ le famille des valeurs propres de M. Alors, $\text{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ et $\det(M) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$. On note $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ la famille des valeurs propres de M. Puisque $\lambda_1\lambda_2 = \det(M) > 0$, λ_1 et λ_2 sont deux réels non nuls et de même signe. Puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M) > 0$, ces deux réels sont strictement positifs. Mais alors, $A \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. En résumé,

$$\forall M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}),\ M \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Tr}(M) > 0 \text{ et } \det(M) > 0.$$

Q13. La matrice $D = \text{diag}(-1, -1, 3)$ vérifie $D \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D) = 1 > 0$ et $\det(D) = 3 > 0$. Pourtant, D n'est pas définie positive car D admet une valeur propre négative. La condition n'est plus suffisante au format $(3, 3)$.

Q14. La fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, si la fonction f admet un extremum local en un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, ce point est un point critique de f. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2} \\ 1 - x^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. .$$

La fonction f admet donc un point critique et un seul, le point $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Pour $(x,y)\in]0,+\infty[^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{2}{x^3y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{2}{xy^3}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2}$. La matrice hessienne de f en $(x_0,y_0)=(1,1)$ est donc :

$$\mathrm{Hf}\,(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Hf}\,(x_0,y_0))=4>0$ et que $\det\,(\mathrm{Hf}\,(x_0,y_0))=3>0$, la matrice $\mathrm{Hf}\,(x_0,y_0)$ est définie positive d'après la question **Q12**. On sait alors que la fonction f admet un minimum local en $(x_0,y_0)=(1,1)$. Ce minimum local est égal à $f(1,1)$ c'est-à-dire 3.

Le critère de Sylvester

Q15. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Soit $X_k=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. On découpe alors la matrice M en blocs : $M=\begin{pmatrix}M_k&C\\B&D\end{pmatrix}$ où $M_k\in\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$X^TMX=\begin{pmatrix}X_k^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_k&C\\B&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_k^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_kX_k\\BX_k\end{pmatrix}=X_k^TM_kX_k.$$

Q16. Soit $M\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Avec les notations de la question précédente, pour tout $X_k\in\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$,

$$X_k^TM_kX_k=X^TMX>0\text{ car }X\neq 0.$$

Donc, $M_k\in\mathscr{S}_k^{++}(\mathbb{R})$ puis $\det\,(M_k)>0$ d'après la question **Q11**.

On a montré que si M est définie positive, alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\det\,(M_k)>0$.

Q17. $\det(Q)=\det\,(I_{n-1})\times 1=1\neq 0$ (déterminant par blocs) et donc Q est une matrice inversible.

Puisque par hypothèse, $M_{n-1}\in\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, 0 n'est pas valeur propre de M_{n-1} puis $M_{n-1}\in GL_{n-1}(\mathbb{R})$. Mais alors, $\mathrm{Im}\,(M_{n-1})=\mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. En particulier, il existe $V\in\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V=-U$ ou encore $M_{n-1}V+U=0_{n-1,1}$.

Un calcul par blocs fournit alors, en tenant compte de $M_{n-1}V+U=0$ et $M_{n-1}^T=M_{n-1}$,

$$\begin{aligned}Q^TMQ&=\begin{pmatrix}I_{n-1}&0_{n-1,1}\\V^T&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{n-1}&U\\U^T&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1}&V\\0_{1,n-1}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n-1}&0_{n-1,1}\\V^T&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{n-1}&0_{n-1,1}\\U^T&U^TV+\alpha\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}M_{n-1}&0_{n-1,1}\\V^TM_{n-1}+U^T&U^TV+\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{n-1}&0_{n-1,1}\\(M_{n-1}V+U)^T&U^TV+\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{n-1}&0_{n-1,1}\\0_{1,n-1}&U^TV+\alpha\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On pose $\beta=U^TV+\alpha$ (β est un réel). Un calcul par blocs fournit

$$(\det(Q))^2\det(M)=\det\left(Q^TMQ\right)=\det\,(M_{n-1})\times\beta$$

et donc $\beta=\dfrac{(\det(Q))^2\det(M)}{\det\,(M_{n-1})}>0$.

Q18. Montrons par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$, « pour toute $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, si M vérifie le critère de Sylvester, alors M est définie positive » $(\mathscr{P}_n)$.

- Si $M=(\lambda)\in\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester, alors $\lambda>0$ puis $M\in\mathscr{S}_1^{++}(\mathbb{R})$. $(\mathscr{P}_1)$ est vraie.
- Soit $n\geqslant 2$. Supposons $(\mathscr{P}_{n-1})$. Soit $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester. Avec les notations précédentes, M_{n-1} vérifie le critère de Sylvester puis M_{n-1} est définie positive par hypothèse de récurrence.
  Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X'=Q^{-1}X$ de sorte que $X=QX'$. On écrit X' sous la forme $X'=\begin{pmatrix}X'_{n-1}\\x'\end{pmatrix}$ où $X'_{n-1}\in\mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $x'\in\mathbb{R}$. Toujours avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}X^TMX &= (QX')^TMQX' = X'^TQ^TMQX' = \begin{pmatrix}X'^T_{n-1} & x'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{n-1} & 0_{n-1,1}\\ 0_{1,n-1} & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'_{n-1}\\ x'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}X'^T_{n-1} & x'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{n-1}X'_{n-1}\\ \beta x'\end{pmatrix} = X'^T_{n-1}M_{n-1}X'_{n-1} + \beta x'^2.\end{aligned}$$

Puisque M_{n-1} est positive et β est positif, cette expression est positive. De plus,

$$\begin{aligned}X^TMX = 0 &\Rightarrow X'^T_{n-1}M_{n-1}X'_{n-1} + \beta x'^2 = 0\\ &\Rightarrow X'^T_{n-1}M_{n-1}X'_{n-1} = \beta x'^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)}\\ &\Rightarrow X'_{n-1} = 0 \text{ et } x' = 0 \text{ (car } M_{n-1} \text{ est définie positive et car } \beta \neq 0)\\ &\Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X = 0.\end{aligned}$$

Donc, M est définie positive.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les trois mineurs de SYLVESTER sont $2 > 0$, $1 > 0$ et

$$\det(C(x)) = \begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & x\\ 0 & x & 1\end{vmatrix} = 2\left(1-x^2\right) - 1 = 1 - 2x^2.$$

D'après le critère de SYLVESTER, $C(x) \in \mathscr{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Q20. $\det(2) = 2 > 0$. $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 2 > 0$. Ensuite, en développant suivant la dernière colonne,

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 2 \times 2 - 2 \times 3 + (-5) = -7 < 0.$$

D'après le critère de SYLVESTER, la matrice proposée n'est pas définie positive.

Q21. Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on sait que

$$X^TAX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Soit alors $A = \begin{pmatrix}4 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$. Pour $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$X^TAX = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz.$$

Or, $4 > 0$, $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 3 > 0$ et enfin,

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 1\end{vmatrix} = 4 - 1 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} > 0.$$

D'après le critère de SYLVESTER, $A \in \mathscr{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ et donc, pour $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^TAX > 0$.

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Delta_n = \det(S_n)$. On a déjà $\Delta_1 = \sqrt{3}$ et $\Delta_2 = 2$. Soit $n \geqslant 1$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\Delta_{n+2} = \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & & \dots & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix} = \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \Delta_n$$

en développant suivant la première ligne. Ainsi,

$$\Delta_1 = \sqrt{3},\ \Delta_2 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+2} = \sqrt{3}\Delta_{n+1} - \Delta_n.$$

Donc, $\Delta_3 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_4 = 1 > 0$, $\Delta_5 = 0$. Par suite, S_n est définie positive si et seulement si $n \in [\![1, 4]\!]$.