SESSION 2023

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES

EXERCICE

Fonction de Bessel

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ et donc intégrable sur ce segment. Donc, $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & \cos(x\sin(t)) \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \Phi(x, t)\ dt$.

Pour chaque $x \in [0, \pi]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, \pi]$. De plus, la fonction Φ admet sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ des dérivées partielles première et seconde par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$$

et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi],\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t)).$$

De plus,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, \pi]$,
- pour tout $t \in [0, \pi]$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 1 = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant 1 = \varphi_2(t)$ où de plus les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux, positives et intégrables sur $[0, \pi]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\ dt = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\ dt$$

et

$$f''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)\ dt = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\ dt.$$

Q3. La fonction h admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable t en tant que produit de fonctions admettant sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à t et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) &= -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + \cos(t) \times x\cos(t)\cos(x\sin(t)) \\ &= -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\left(1 - \sin^2(t)\right)\cos(x\sin(t)).\end{aligned}$$

Q4. Soit $x \in \mathbb{R}$. En intégrant l'égalité précédente sur $[0, \pi]$, on obtient

$$f'(x) + xf(x) + xf''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t)\ dt = [h(x, t)]_{t=0}^{t=\pi} = \cos(\pi)\sin(0) - \cos(0)\sin(0) = 0.$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

Q5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $R_a > 0$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que la fonction g est de classe C^2 sur $]-R_a, R_a[$ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Par suite, pour tout $x \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned}
xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} \\
&= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2 a_n + a_{n-2}\right) x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $R_a > 0$, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R_a, R_a[&\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Q6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \pi]$, posons $g_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$|g_n(t)| = \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} |x|^{2n} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

puis $\|g_n\|_{\infty,\ [0,\pi]} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$. La série numérique de terme général $\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $\text{ch}(|x|)$ (ou plus simplement $\text{ch}(x)$)). Donc, la série numérique de terme général $\|g_n\|_{\infty,\ [0,\pi]}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Ainsi, la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0, \pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- (la fonction $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, \pi]$),
- la série numérique de terme général $\int_0^\pi g_n(t)\ dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- $\int_0^\pi \cos(x \sin(t))\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi g_n(t)\ dt$.

Plus explicitement,

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t))\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Q7. Ainsi, la fonction f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = \int_0^\pi \cos(0)\ dt = \pi.$$

Ceci montre l'existence d'une solution de (E) développable en série entière et prenant la valeur π en 0.

D'autre part, si g est une solution de (E) développable en série entière, d'après la question Q5, on a nécessairement (avec les notations de la question Q5), $a_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$.

Par suite, on a nécessairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2} \times -\frac{1}{(2(n-1))^2} \times \ldots \times -\frac{1}{2^2} \times a_0 = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} a_0.$$

De plus, l'égalité $g(0) = \pi$ impose $a_0 = \pi$. Ceci montre l'unicité d'une solution de (E) développable en série entière et prenant la valeur π en 0.

Finalement, il existe une solution de (E) et une seule, développable en série entière et prenant la valeur π en 0, à savoir la fonction f.

Q8. Par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \dfrac{W_n}{(2n)!} = (-1)^n \dfrac{1}{2^{2n}(n!)^2}\pi$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\pi = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,\pi.$$

PROBLEME 1

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I - Un développement en série entière

Q9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On sait que pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

avec pour $n \geqslant 1$, $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$. De plus, le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est égal à 1.

Q10. Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

Q11. Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Posons $Y_t = \dfrac{X_t + 1}{2}$. Alors $Y_t(\Omega) = \{0,1\}$ puis $P(Y_t = 1) = P(X_t = 1) = p$ et $P(Y_t = 0) = P(X_t = -1) = 1 - p$. La variable Y_t suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p.

Puisque les variables X_t, $t \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes, il en est de même des variables Y_t, $t \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} X_t + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2}$ puisque $S_n = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}$. Donc, $(S_n = 0) = \left(\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right)$.

Puisque chaque Y_t est à valeurs entières, si n est impair, l'événement $(S_n = 0)$ est l'événement impossible puis $P(S_n = 0) = 0$.

Supposons maintenant n pair. Donc $\dfrac{n}{2}$ est un entier puis (puisque $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t$ suit la loi binomiale de paramètres n et p)

$$P(S_n = 0) = P\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}(p(1-p))^{\frac{n}{2}}.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}}(p(1-p))^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Q13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \dbinom{2n}{n}(p(1-p))^n$. D'après la formule de STIRLING,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

puis

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}(4p(1-p))^n.$$

Soit $p \in]0,1[$. $(0<)4p(1-p) < 1 \Leftrightarrow 4p^2 - 4p + 1 > 0 \Leftrightarrow (2p-1)^2 > 0 \Leftrightarrow p \neq \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, si $p \in]0,1[\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(4p(1-p))^n = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.
Si $p = \dfrac{1}{2}$, $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ et encore une fois, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ et finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'étapes, il n'y a presque aucune chance que la particule soit en l'origine.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Q14. On rappelle qu'il est impossible que la particule soit en l'origine au bout d'un nombre impair d'étapes. Donc, T_n est le nombre de passages par l'origine entre les instants $t = 0$ et $t = 2n$ (compris).

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question Q12, la probabilité d'être en l'origine à l'instant $t = 2j$ est

$$P(O_{2j} = 1) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$$

et d'autre part, $P(O_{2j} = 0) = 1 - P(O_{2j} = 1)$. La variable O_{2j} suit la loi de BERNOULLI de paramètre $p_j = \dbinom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Puisque $p_0 = 1$ car la particule est à l'origine à l'instant 0, ceci reste vrai pour $j = 0$.

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(O_{2j}) = p_j = \dbinom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Mais alors, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

Q16. Soit $p \in]0,1[\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Alors, $4p(1-p) \in]0,1[$ d'après la question Q13 puis, d'après la question Q10,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}(4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \frac{1}{|2p-1|}.$$

Donc, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{|2p-1|}$.

Q17. Si $p = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

- $\mathbb{E}(T_1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{1} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = 1 + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$ et $\dfrac{2\times 1+1}{2^2}\dbinom{2}{1} = \dfrac{3}{2}$. L'égalité est vraie quand $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \mathbb{E}(T_n) + \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(4(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{4(2n+1)(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1\right) = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}(2(n+1)+1) \\
&= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. Ensuite, d'après la question Q13,

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{2^{2n}} \times \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = +\infty$.

PROBLEME 2

Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $M(a, b)$ est symétrique réelle et donc $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

Q19. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. $M(a, b)V = \begin{pmatrix} b+(n-1)a \\ b+(n-1)a \\ \vdots \\ b+(n-1)a \end{pmatrix} = (b+(n-1)a)V$.

Puisque $V \neq 0$, V est un vecteur propre de $M(a, b)$ et la valeur propre associée est $b+(n-1)a$.

Q20. 1ère solution.

$$P_{1,0} = \begin{vmatrix} X & -1 & \dots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-(n-1) & -1 & \dots & \dots & -1 \\ X-(n-1) & X & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$$

$$= (X-(n-1))\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & X & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} \quad \text{(par linéarité par rapport à la première colonne)}$$

On effectue ensuite les transformations : $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_1$. On obtient un déterminant triangulaire :

$$P_{1,0} = (X-(n-1)))\begin{vmatrix} 1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & X+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$$

2ème solution. D'après Q19 appliquée avec $a = 1$ et $b = 0$, $n-1$ est valeur propre de $M(1,0)$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé. $M(1,0)$ étant symétrique réelle, on sait que les sous-espaces propres sont orthogonaux. Un vecteur orthogonal à V est $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, $M(1,0)V' = -V'$ et donc -1 est valeur propre de $M(1,0)$ avec $-1 \neq n-1$.

Puisque $M(1,0)$ est diagonalisable, l'ordre de multiplicté de -1 est exactement la dimension de $\mathrm{Ker}\,(M(1,0)+I_n)$ c'est-à-dire $n - \mathrm{rg}\,(M(1,0)+I_n)$. Les colonnes de $M(1,0)+I_n$ sont égales et non nulles. Donc, $\mathrm{rg}\,(M(1,0)+I_n) = 1$ puis -1 est valeur propre de $M(1,0)$ d'ordre $n-1$. Mais alors, $n-1$ est valeur propre de $M(1,0)$ d'ordre 1.

Finalement, $\mathrm{Sp}(M(1,0)) = (n-1,-1,\dots,-1)$ ou encore $P_{1,0} = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q21. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} P_{a,b} &= \det(XI_n - M(a,b)) = \det((X-b)I_n - aM(1,0)) = a^n \det\left(\left(\frac{X-b}{a}\right)I_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right). \end{aligned}$$

De la question Q20, on déduit

$$P_{a,b} = a^n\left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = (X-(b+(n-1)a))(X-(b-a))^{n-1}.$$

De plus, $b+(n-1)a = b-a \Leftrightarrow na = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Puisque $a \neq 0$, $b+(n-1)a \neq b-a$ et donc les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+(n-1)a$, d'ordre 1, et $b-a$ d'ordre $n-1$.

Q22. $M(a,b)-(b-a)I_n = a\,(I_n + M(1,0)) = a\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et

$$M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n = a\begin{pmatrix} -(n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -(n-1) \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients de $(M(a,b)-(b-a)I_n)\,(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n)$ sont égaux à $-(n-1)+\underbrace{1+\dots+1}_{n-1 \text{ termes}}$ c'est -à-dire 0. Finalement, $(M(a,b)-(b-a)I_n)\,(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n) = 0_n$ ou encore $Q_{a,b}\,(M(a,b)) = 0_n$.

Si $a \neq 0$, $Q_{a,b}$ est un polynôme à racines simples d'après la question précédente, annulateur de $M(a,b)$. On en déduit que $M(a,b)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $a = 0$, alors $M(a,b) = bI_n$ et donc $M(a,b)$ est diagonalisable car diagonale.

Q23. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$ s'écrit

$$X^k = P_k \times Q_{a,b} + \alpha_k X + \beta_k \quad (*)$$

où P_k est un polynôme et α_k et β_k deux nombres complexes. En évaluant les deux membres de l'égalité ci-dessus en $b-a$ et $b+(n-1)a$, on obtient $\begin{cases} (b-a)\alpha_k + \beta_k = (b-a)^k \\ (b+(n-1)a)\alpha_k + \beta_k = (b+(n-1)a)^k \end{cases}$.

En retranchant les deux égalités membre à membre, on obtient $\alpha_k = \dfrac{1}{na}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)$ puis

$$\begin{aligned}\beta_k &= (b-a)^k - (b-a)\alpha_k = (b-a)^k - (b-a)\frac{1}{na}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)\\ &= \frac{1}{na}\left((b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k\right).\end{aligned}$$

En évaluant les deux membres de l'égalité $(*)$ en $M(a,b)$ et en tenant compte de $Q_{a,b}(M(a,b)) = 0_n$, on obtient

$$(M(a,b))^k = \frac{1}{na}\left(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)M(a,b) + \left((b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k\right)I_n\right).$$

Q24. On suppose de plus que $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$. Si $a \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|M(a,b)^k\right\| \leqslant \frac{1}{n|a|}\left(|b+(n-1)a|^k + |b-a|^k\right)\|M(a,b)\| + \left(|b+(n-1)a||b-a|^k + |b-a||b+(n-1)a|^k\right)\|I_n\|)$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|M(a,b)^k\right\| = 0$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty}(M(a,b))^k = 0_n$. Ce dernier reste vrai si $a = 0$ car alors $|b| < 1$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty}(M(a,b))^k = \lim\limits_{k\to+\infty} b^k I_n = 0_n$.

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Q25. $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ puis $\left\|u^k(e_1)\right\| = |\lambda_1|^k\|e_1\|$. Puisque $|\lambda_1| < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|u^k(e_1)\right\| = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0$.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$.

Q26. Par définition de la matrice T, $u(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}e_{i+1}$ est un élément de $\text{Vect}(e_j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ et donc il existe $x \in \text{Vect}(e_j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tel que $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x) &= \sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m\left(u(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}e_{i+1}\right) = \sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}\left(u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1})\right)\\ &= \sum_{m=0}^{k-1}\left(\lambda_{i+1}^{k-1-m}u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}^{k-1-(m-1)}u^m(e_{i+1})\right)\\ &= u^k(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}^k e_{i+1} \text{ (somme télescopique)},\end{aligned}$$

et donc $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)$.

Q27. Posons $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j e_j$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x) = \sum_{j=1}^{i} x_j\left(\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(e_j)\right)$ puis

$$\left\|\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{i}|x_j|\left(\sum_{m=0}^{k-1}|\lambda_{i+1}|^{k-m-1}\|u^m(e_j)\|\right).$$

Par hypothèse (de récurrence forte), pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{m\to+\infty}\|u^m(e_j)\| = 0$.
Soit alors $j \in [\![1, i]\!]$ fixé. La suite $(\|u^m(e_j)\|)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente et en particulier bornée. On note M_j un majorant de cette suite. D'autre part, puisque $|\lambda_{i+1}| < 1$, la série de terme général $|\lambda_{i+1}|^m$, $m \in \mathbb{N}$, converge. On pose $S = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}|\lambda_{i+1}|^m$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $m \geqslant k_0$, $\|u^m(e_j)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(S+1)}$. Pour $k \geqslant k_0 + 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| &= \sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| + \sum_{m=k_0+1}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\|\\ &\leqslant M_j\sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m} + \frac{\varepsilon}{2(S+1)}\sum_{m=k_0+1}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\\ &\leqslant M_j\sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m} + \frac{\varepsilon S}{2(S+1)} \leqslant M_j\sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $m \in [\![0, k_0]\!]$, puisque $|\lambda_{i+1}| < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}|\lambda_{i+1}|^{k-1-m} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} M_j\sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m} = 0$$

(somme d'un nombre constant quand k varie de suites de limite nulle). Par suite, il existe $k_1 \geqslant k_0+2$ tel que pour $k \geqslant k_1$, $M_j\displaystyle\sum_{m=0}^{k_0}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $k \geqslant k_1$, on a donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_1 \in \mathbb{N}/\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left(k \geqslant k_1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| \leqslant \varepsilon\right)$ et donc

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| = 0.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1-m}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\| = 0$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\sum_{j=1}^{i}|x_j|\left(\sum_{m=0}^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-m-1}\left\|u^m\left(e_j\right)\right\|\right) = 0$ (combinaison linéaire de suites de limite nulle) et finalement, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)\right\| = 0$.

Enfin, puisque $|\lambda_{i+1}| < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_{i+1}^k e_{i+1} = 0$ et d'après ce qui précède, $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x) = 0$. Mais alors,

$$\lim_{k\to+\infty}u^k\left(e_{i+1}\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)\right) = 0.$$

Q28. On a montré par récurrence forte finie (questions Q25 et Q27) que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}u^k\left(e_i\right) = 0$. Maintenant, les $u^k\left(e_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, « sont » les colonnes de T^k et donc $\lim\limits_{k\to+\infty}T^k = 0$.

Q29. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. On sait que A est triangulable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.
Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de T qui sont encore les valeurs propres de A. D'après les questions précédentes, $\lim\limits_{k\to+\infty}T^k = 0$.

Soit alors $f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ M & \mapsto & PMP^{-1}\end{array}$. f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty}A^k = \lim_{k\to+\infty}f\left(T^k\right) = f\left(\lim_{k\to+\infty}T^k\right) = f(0) = 0.$$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Q30. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i,j}| \geqslant 0$ et en particulier, $a_{i,i} \neq 0$. Ainsi, la matrice M est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls. On en déduit que M est inversible.

Q31. $Y = AX = MX - FX$ puis M étant inversible, $M^{-1}Y = X - M^{-1}FX = X - BX$. On en déduit que $X = BX + M^{-1}Y$.

Q32. Par définition de V, $BV = \lambda V$ ou encore $M^{-1}FV = \lambda V$. En multipliant les deux membres de cette égalité par M, on obtient $FV = \lambda MV$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'égalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}v_j$ s'écrit encore (avec les conventions de l'énoncé)

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}v_j = \lambda a_{i,i}v_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j,$$

et donc $\displaystyle\lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right)$.

Q33. Soit i_0 tel que $|v_{i_0}| = \underset{j \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} |v_j|$. Si $v_{i_0} = 0$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|v_j| \leqslant 0$ puis pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $v_j = 0$ et donc $V = 0$ ce qui est faux (puisque V est un vecteur propre). Donc $|v_{i_0}| > 0$.

D'après la question Q33,

$$\begin{aligned}
|\lambda a_{i_0,i_0}|\,|v_{i_0}| &= \left|\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}v_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|\,|v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\,|v_j| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right) |v_{i_0}|.
\end{aligned}$$

Puisque $|v_{i_0}| > 0$, après simplification par $|v_{i_0}|$, on obtient

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|.$$

Q34. Supposons par l'absurde que $|\lambda| \geqslant 1$. On en déduit que $\dfrac{1}{|\lambda|} \leqslant 1$ puis

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i,j}| + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit le fait que A est à diagonale strictement dominante. Donc $|\lambda| < 1$.

Ainsi, les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice B sont toutes de module strictement inférieur à 1. D'après la question Q29,

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0.$$

Q35. Soit $k \in \mathbb{N}$. $X_{k+1} - X = \left(BX_k + M^{-1}Y\right) - \left(BX + M^{-1}Y\right) = B\left(X_k - X\right)$. Mais alors, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ X_k - X = B^k\left(X_0 - X\right).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$, on en déduit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} X_k = X$.

