SESSION 2023

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MPI

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

On note que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \|L_i\|_1$ où $L_1, \ldots, L_n$, sont les lignes de la matrice A.

Q1. • N est une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Positivité : pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) \geqslant 0$,

• Axiome de séparation. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|L_i\|_1 \leqslant 0$ puis, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $L_i = 0$ et donc $A = 0$.

• Homogénéité : pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = |\lambda| \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = |\lambda| N(A).$$

• Inégalité triangulaire. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant N(A) + N(B)$$

et donc $N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$.

On a montré que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in S$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant 1 \times N(A) = N(A).$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|(AX)_i| \leqslant N(A)$ et donc $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, $\{\|AX\|_\infty,\ X \in S\}$ est une partie non vide et majorée (par $N(A)$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\{\|AX\|_\infty,\ X \in S\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ puis que $|||A|||$ existe dans $\mathbb{R}$.

Q3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. $\dfrac{1}{\|X\|_\infty} X \in S$ puis, par définition de $|||A|||$, $\left\|A \dfrac{1}{\|X\|_\infty} X\right\|_\infty \leqslant |||A|||$. Ceci fournit $\dfrac{1}{\|X\|_\infty} \|AX\|_\infty \leqslant |||A|||$ puis $\|AX\|_\infty \leqslant |||A|||\ \|X\|_\infty$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $X = 0$ et on a donc montré que

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\|_\infty \leqslant |||A|||\ \|X\|_\infty.$$

Q4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question Q2, $N(A)$ est un majorant de $\{\|AX\|_\infty,\ X \in S\}$. Puisque $|||A|||$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $|||A||| \leqslant N(A)$.

Soit alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $N(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. Soit $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par : $x_j = 1$ si $a_{i_0,j} \geqslant 0$ et $x_j = -1$ si $a_{i_0,j} < 0$. On a $X \in S$ puis,

$$N(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \|AX\|_\infty \leqslant |||A|||.$$

Finalement, $|||A||| = N(A)$.

Q5. $|||A||| = \text{Max}\{|2| + |-1|, |3| + |-2| + |3|, |5| + 0 + |1|\} = 8$.

EXERCICE II

Q6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^{-x} - x$. La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc injective et on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$. On note x_0 cette solution.

Q7. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y.$$

Par suite, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ 2x - 2 \times \dfrac{x}{2} - e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ e^{-x} = x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}.$$

La fonction f admet un point critique et un seul, le point $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$. On pose $y_0 = \dfrac{x_0}{2}$.

Q8. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, si f est un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f. Ainsi, si f admet un extremum local, c'est nécessairement en le point $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Avec les notations de Monge, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$ puis $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} r(x_0, y_0) & s(x_0, y_0) \\ s(x_0, y_0) & t(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant, à savoir

$$\Delta = 4\left(2 + e^{-x_0}\right) - 4 = 4\left(1 + e^{-x_0}\right),$$

est strictement positif. On sait alors que f admet un extremum local en $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$. De plus, sa trace, à savoir $6 + e^{-x_0}$, est strictement positive et on sait que cet extremum local est un minimum local.

Finalement, f admet un et un seul extremum local. Cet extremum local est un minimum local. Il est atteint en $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$ où x_0 est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$. La calculatrice fournit $x_0 = 0,567\ldots$

PROBLEME

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ avec $\alpha-1>-1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\alpha-1}}{x} = x^{\alpha-2}$ avec $\alpha-2<-1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q10. Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$, de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, on obtient

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_1^0 \frac{\frac{1}{t^{\alpha-1}}}{1+\frac{1}{t}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\,dt = I(1-\alpha).$$

Q11. *Première tentative.* Pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ puis

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+\alpha-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = (-1)^n$. La série numérique de terme général $\ell_n = (-1)^n$ est divergente. D'après le théorème d'interversion des limites, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q12. *Deuxième tentative.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}\right| = x^{\alpha-1}\left|\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\right| \leqslant \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\left(1+\left|(-1)^{n+1}x^{n+1}\right|\right) \leqslant \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}.$$

Pour $x \in]0,1[$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{2x^{\alpha-1}}{1+x}$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ (car intégrable sur $]0,1]$ d'après la question Q9). Ainsi,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est continue par morceaux sur $]0,1[$,
- la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ sur $]0,1[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
- il existe une fonction φ, continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0,1[$, $|S_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- chaque fonction S_n, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable sur $]0,1[$,
- (la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$),
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = I(\alpha)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégration (en tenant compte de l'intégrabilité de chaque terme),

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{k+\alpha-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{x^{k+\alpha}}{\alpha+k}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

On a donc montré que,

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

Q13. Soit $\alpha \in]0,1[$. D'après la question Q10 et en tenant compte du fait que $1-\alpha \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
I(\alpha)+J(\alpha) = I(\alpha)+I(1-\alpha) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-\alpha+n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \text{ (en posant } p=n+1) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha-n} \text{ (la variable de sommation étant muette)} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

Q14. Soit $\alpha \in]0,1[$. $I(\alpha)+J(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$.

D'après la question précédente, d'après le résultat admis par l'énoncé appliqué en prenant $x=0$ et en tenant compte de $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ car $\alpha\pi \in]0,\pi[$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

• $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x-1>-1$. Donc, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• D'après un théorème de croissances comparées, $t^2 \times t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O(1)$ et donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ou encore $\Gamma(x)$ existe. On a montré que la fronction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $g_\alpha : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt} \end{array}$ de sorte que pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x,t)\,dt$.

- pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g_\alpha(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto g_\alpha(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|g_\alpha(x,t)| = \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt} \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après la question Q9).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est définie sur $[0,+\infty[$ (c'est-à-dire que pour chaque x de $[0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g_\alpha(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$) et continue sur $[0,+\infty[$.

Q17. Soit $a>0$. La fonction g_α admet sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}.$$

De plus,

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a, +\infty[$,
- pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt} \leqslant \dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-at} = \varphi_1(t)$.

La fonction φ_1 est continue par morceaux et positive sur $]0, +\infty[$, équivalente à $t^{\alpha-1}$ en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction φ_1 est finalement intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f_α est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que la fonction f_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et de plus,

$$\forall x > 0,\ f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\ dt.$$

Q18. Soit $x \geqslant 1$. En posant $u = xt$ et donc $t = \dfrac{u}{x}$ puis $dt = \dfrac{du}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned}0 \leqslant f_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}}{\frac{u}{x}+1}\ e^{-u}\ \frac{du}{x} = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+x}e^{-u}\ du\\ &\leqslant x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}e^{-u}\ du = f_\alpha(1)x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha - 1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(1)x^{\alpha-1} = 0$. Le théorème des gendarmes alors permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$.

Q19. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite. $\dfrac{e^{t}}{t^\alpha} \underset{t\to0}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt - \int_0^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt\right) = 0.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Soit $x > 0$. D'après la question Q17,

$$\begin{aligned}f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\ dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{t+1}e^{-xt}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{t+1}e^{-xt}\ dt\\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-xt}\ dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-u}\ \frac{du}{x} \text{ (en posant } u = xt)\\ &= \frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\ du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.\end{aligned}$$

Q21. • La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue (et intégrable) sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt - \int_0^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée la fonction $x \mapsto -\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$.

Mais alors, la fonction g_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\left(e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt + e^x\left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right)\right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

et donc, pour tout $x > 0$, $g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$. La fonction g_α est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}\quad(E)$.

• Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x)$. $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ (car $\alpha > 0$). De plus, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)$$

ou encore $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ et donc $\displaystyle e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x) = 0$.

• Puisque f_α et g_α, sont solutions de (E) sur $]0,+\infty[$, $f_\alpha - g_\alpha$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation homogène $y - y' = 0$ et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) - g_\alpha(x) = \lambda e^x$. Enfin, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda e^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(f_\alpha(x) - g_\alpha(x)) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$.

On a montré que $f_\alpha = g_\alpha$.

Q22. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\,dt = \Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$. Par continuité de f_α en 0 (d'après la question Q16) et intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$ (d'après la question Q19), quand x tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = f_\alpha(0) = \lim_{x\to0,\ x>0} f_\alpha(x) = \lim_{x\to0,\ x>0} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt.$$

Q23. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(1-\alpha)$ et donc, d'après la question Q14 et la question précédente,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\ \text{(formule des compléments)}.$$

Q24. Quand $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient en particulier $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$ puis $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0$ par positivité de l'intégration). De plus, en posant $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ puis $dt = 2u\,du$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\,2u\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

et donc, la variable de sommation étant muette,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

