SESSION 2023

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Endomorphisme cyclique

Partie I - Etude d'un premier exemple

Q1. $v = (1,0)$ puis $f(v) = (4,1)$. $v \neq 0$ et $f(v)$ n'est pas colinéaire à v. Donc, la famille $(v, f(v))$ est libre. De plus, $\text{card}(v, f(v)) = 1 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) < +\infty$ et donc la famille $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a montré que f est un endomorphisme cyclique.

Q2. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f = \chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-4)(X-1) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).$$

Donc, $\text{Sp}(f) = (2,3)$.

Soient $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $u \in E_2(f) \Leftrightarrow (A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x$.
Donc, $E_2(f) = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1,1)$.

Soient $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $u \in E_3(f) \Leftrightarrow (A - 3I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$.
Donc, $E_3(f) = \text{Vect}(u_2)$ où $u_2 = (2,1)$.

Q3. Le vecteur u_1 est un vecteur non nul tel que $f(u_1)$ est colinéaire à u_1 et donc tel que la famille $(u_1, f(u_1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Etude d'un deuxième exemple

Q4. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$. Donc, $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et annulateur de M. Donc, la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Le polynôme caractéristique de M est (en développant suivant la première colonne)

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 1 & X & 1 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix} = X\left(X^2 - 1\right) - (X+1) - (1+X) = (X+1)(X(X-1) - 2) = (X+1)^2(X-2).$$

Donc, $\text{Sp}(M) = (-1,-1,2)$.

Q6. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$. D'après la question Q4, $\left(v, g(v), g^2(v)\right) = (v, g(v), g(v) + 2v)$. Cette famille est liée car le troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers. Il n'existe donc pas de vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\left(v, g(v), g^2(v)\right)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme g n'est pas cyclique.

Partie III - Etude d'un troisième exemple

Q7. Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, $\Delta(P)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc, Δ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q).$$

On a montré que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. $\Delta\left(X^0\right) = 1 - 1 = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $p \geqslant 1$. Posons $P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $a_p \neq 0$. Puisque Δ est linéaire,

$$\Delta(P) = a_p \Delta\left(X^p\right) + a_{p-1}\Delta\left(X^{p-1}\right) + \ldots + a_2\Delta\left(X^2\right) + a_1.$$

D'après la question précédente, en tenant compte de $a_p \neq 0$, $a_p\Delta\left(X^p\right)$ est un polynôme de degré $p-1$. D'autre part, toujours d'après la question précédente, $a_{p-1}\Delta\left(X^{p-1}\right) + \ldots + a_2\Delta\left(X^2\right) + a_1$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $p-1$. On en déduit que $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $p-1$ c'est-à-dire $\deg(P) - 1$.

Q10. Soit $P = X^n$. D'après la question précédente, par récurrence finie, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^k(P)$ est un polynôme de degré $n-k$. Ainsi, les polynômes $\Delta^k(P)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont des éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, de degrés deux à deux distincts. On sait alors que la famille $\left(\Delta^k(P)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque de plus, card $\left(\Delta^k(P)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) < +\infty$, on en déduit que la famille $\left(\Delta^k(P)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a montré qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que la famille $\left(\Delta^k(P)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc Δ est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h^p\left(v_i\right) = \lambda_i^p v_i$.

- L'égalité est vraie quand $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $h^p\left(v_i\right) = \lambda_i^p v_i$. Alors, $h^{p+1}\left(v_i\right) = h\left(h^p\left(v_i\right)\right) = \lambda_i^p h\left(v_i\right) = \lambda_i^{p+1} v_i$.

Le résultat est démontré par récurrence. Mais alors, par linéarité de h, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$h^p(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h^p\left(v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^p v_i.$$

Q12. La matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \ldots & \alpha_n\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1\lambda_1^{n-1} & \alpha_2\lambda_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne,

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \mathrm{Van}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right).$$

Q13. Si h admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right) \neq 0$. D'après la question précédente, si on prend $v = v_1 + \ldots + v_n$ (c'est-à-dire $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$), alors

$$\det_{\mathscr{B}}\left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right) \neq 0.$$

La famille $\left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ est alors une base de E puis h est cyclique.

Si les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas deux à deux distincts, on a $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$. Mais alors, pour tout choix de v, $\det_{\mathscr{B}}\left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right) = 0$ puis la famille $\left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ n'est pas une base de E. Dans ce cas, h n'est pas cyclique.

On a montré que si h est diagonalisable, h est cyclique si et seulement si h a n valeurs propres deux à deux distinctes.

EXERCICE 2

La fonction dilogarithme

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Q14. Soit $t \in]0, +\infty[$. Alors, pour tout réel x de $]-\infty, 1]$, $e^t > 1 \geqslant x$ et en particulier, $e^t - x \neq 0$. La fonction f est donc bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q15. La fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
Ensuite, $\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$. La fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est prolongeable par continuité en 0 à droite et donc est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
Ensuite, $t^2\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, on a montré que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q16. Soit $x \in]-\infty, 1]$. Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 < e^t - 1 \leqslant e^t - x$ puis $0 \leqslant \dfrac{1}{e^t - x} \leqslant \dfrac{1}{e^t - 1}$ puis $0 \leqslant \dfrac{t}{e^t - x} \leqslant \dfrac{t}{e^t - 1}$ et donc $0 \leqslant f(t, x) \leqslant f(t, 1)$.

Puisque la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t, x)$.

Q17. D'après la question Q16, la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

- Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $]-\infty, 1]$,
- pour tout $(t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$, $|f(t, x)| = f(t, x) \leqslant f(t, 1) = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question Q15.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t, x)\,dt$ est continue sur $]-\infty, 1]$. Il en est de même de la fonction $L\ :\ x \mapsto x\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t, x)\,dt$.

Partie II - Développement en série entière

Q18. Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction s_n est continue et positive sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées (car $n + 1 > 0$). Donc, la fonction s_n est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,dt$.

Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\dfrac{e^{-(n+1)t}}{n+1}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence de toutes les intégrales considérées, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,dt &= x^n\left(\left[t \times \left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times \left(-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right)\,dt\right)\\ &= x^n\left(-\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{-(n+1)t}}{n+1} + 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt\right) = \frac{x^n}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt\\ &= \frac{x^n}{n+1}\left[-\frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{x^n}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Q19. Soit $x \in [-1,1]$. Soit $t \in]0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n(t) = te^{-t}\left(xe^{-t}\right)^n$. On a $0 < e^{-t} < 1$ puis $|xe^{-t}| = |x|e^{-t} < 1$. La série géométrique de terme général $s_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, est donc convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{-t}\right)^n = \frac{te^{-t}}{1-xe^{-t}} = \frac{te^{-t}}{e^{-t}\left(e^t - x\right)} = \frac{t}{e^t - x} = f(t,x).$$

On a montré que, pour tout $x \in [-1,1]$, la série de fonctions de terme général s_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $t \mapsto f(t,x)$ sur $]0,+\infty[$.

Q20. Soit $x \in [-1,1]$. $\dfrac{x^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc, la série numérique de terme général $\dfrac{x^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

Ensuite,

- chaque fonction s_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général s_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto f(t,x)$ et la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^n}{(n+1)^2} < +\infty$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

- (la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$),
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\ dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\ dt$.

Plus explicitement,

$$L(x) = x\int_0^{+\infty} f(x,t) = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

Q21. Soit $x \in [-1,1]$. Alors, $-x \in [-1,1]$ et $x^2 \in [-1,1]$ puis

$$\begin{aligned} L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n^2} \\ &= 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\left(x^2\right)^p}{p^2} \\ &= \frac{1}{2}L\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Q22. $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis d'après la question précédente,

$$L(-1) = \frac{1}{2}L\left((-1)^2\right) - L(1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie III - Une autre propriété

Q23. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. En particulier, la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$L'(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Par suite, $L'(0) = 1$ et pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$L'(x) = \frac{1}{x}\left(x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On a montré que : $\forall x \in]-1,1[$, $L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

Q24. La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $]0,1[$ et la fonction L est dérivable sur $]0,1[$. Donc, la fonction $x \mapsto L(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$. Il en est de même de la fonction h et pour $x \in]0,1[$ (de sorte que $0 < 1-x < 1$),

$$h'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \ln(x)\frac{1}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0.$$

Ainsi, la dérivée de la fonction h est nulle sur l'intervalle $]0,1[$. On en déduit que la fonction h est constante sur $]0,1[$.

Q25. Donc, pour tout $x \in]0,1[$, $h(x) = \lim\limits_{t\to 0} h(t)$. Puisque la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$ d'après la question Q17 (et en particulier en 0 et 1), $\lim\limits_{t\to 0}(L(t) + L(1-t)) = L(0) + L(1) = L(1)$. D'autre part, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = L(1)$ puis que

$$\forall x \in]0,1[,\ h(x) = L(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensuite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \frac{1}{2}}\,dt = L\left(\frac{1}{2}\right)$. Or $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2L\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln^2(2)$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \ln^2(2)\right).$$

EXERCICE 3

Un jeu de société

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Q26. Soit $n \in \mathbb{N}$. X_n représente le nombre de cases parcourues au n-ème tour de jeu et S_n représente le nombre de cases parcourues du début du jeu au n-ème coup (compris).

Q27. T est le nombre de coups nécessaire pour atteindre ou dépasser la case numérotée A, si cette case est atteinte ou dépassée et sinon $T = 0$.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q28. La fonction f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]-1,1[$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

- Puisque pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{0!}{(1-x)^{1+0}} = \dfrac{1}{1-x}$, la formule est vraie quand $p = 0$.

- Soit $p \geqslant 0$. Supposons que pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$. Alors, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x) = p! \times \frac{(-1)\times(-(p+1))}{(1-x)^{p+2}} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

Q29. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant p$, posons $a_n = \dbinom{n}{p}$. Pour $n \geqslant p$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p}.$$

Mais alors, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$. D'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a = \dfrac{1}{1} = 1$.

Q30. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Soit alors $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} &= \frac{x^p}{p!} \times \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(x) \\ &= \frac{x^p}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n-p)!} x^n \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n.\end{aligned}$$

Partie II - Etude d'un premier cas

II.1 - Loi des variables S_n et T

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k(\Omega) = \{0,1\}$ et de plus, $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Puisque les variables X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont indépendantes, on sait que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{2}$.

Q32. Puisqu'on avance d'au plus une case à chaque étape, $T(\Omega) = \{0\} \cup (\mathbb{N} \cap [A, +\infty[)$.

Q33. Soit $k \geqslant A$ (en particulier, $k \geqslant 1$). Si $k \geqslant 2$, l'événement $(T = k)$ est l'événement $\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{k-1} (S_n \leqslant A-1)\right) \cap (S_k \geqslant A)$ ou encore (puisque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante), l'événement $(T = k)$ est l'événement $(S_{k-1} \leqslant A-1) \cap (S_k \geqslant A)$.

Puisque $0 \leqslant X_k = S_k - S_{k-1} \leqslant 1$, l'événement $(S_{k-1} \leqslant A-1) \cap (S_k \geqslant A)$ est encore l'événement $(S_{k-1} = A-1) \cap (S_k = A)$ ou encore l'événement $(S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)$. Finalement, si $k \geqslant 2$, l'événement $(T = k)$ est l'événement $(S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)$.

Ensuite, T ne prend la valeur 1 que si $A = 1$. Dans ce cas, l'événement $(S_0 = A-1)$ est l'événement certain puis $(T = 1) = (X_1 = 1) = (S_0 = A-1) \cap (X_1 = 1)$. Finalement,

$$\forall k \geqslant A,\ (T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)\,.$$

Soit $k \geqslant A$. Si $k \geqslant 2$, la variable X_k et les variables $X_1, \ldots, X_{k-1}$, sont indépendantes. Mais alors, les variables X_k et S_{k-1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Puisque la variable S_{k-1} suit la loi binomiale de paramètres $k-1$ et $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que

$$P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1) \times P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{A-1}} \times \frac{1}{2^{k-A}} \times \frac{1}{2} = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} \quad (*).$$

Maintenant, $k = 1$ n'est possible que si $A = 1$. Dans ce cas, $P(T = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et d'autre part, $\dbinom{k-1}{A-1} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}$. L'égalité $(*)$ est encore valable quand $k = 1$. On a montré que

$$\forall k \geqslant A,\ P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

Q34. Par passage au complémentaire,

$$\begin{aligned}
P(T=0) &= 1-P\left(\bigcup_{k=A}^{+\infty}(T=k)\right) = 1-\sum_{k=A}^{+\infty}P(T=k) = 1-\sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k} \\
&= 1-\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\frac{1}{2^{k+1}} = 1-\frac{1}{2}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^A}\ \text{(d'après la question Q30)} \\
&= 1-1=0.
\end{aligned}$$

Donc, $P(T=0)=0$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q35. Pour $k\geqslant A$, $P(T=k)\neq 0$ puis

$$\left|\frac{P(T=k+1)}{P(T=k)}\right| = \frac{k!}{(A-1)!(k+1-A)!2^{k+1}}\times\frac{(A-1)!(k-A)!2^k}{(k-1)!} = \frac{k}{2(k+1-A)}.$$

Par suite, $\left|\frac{P(T=k+1)}{P(T=k)}\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ puis, d'après la règle de d'Alembert, $R_T=2$.

Pour $x\in]-2,2[$, d'après la question Q30,

$$\begin{aligned}
G_T(x) &= \sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{x}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A} \\
&= \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.
\end{aligned}$$

Q36. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est l'espérance de T. Puisque $R_T>1$, G_T est dérivable en 1. On sait alors que T admet une espérance et que $\mathbb{E}(T)=\sum_{k=A}^{+\infty}kP(T=k)=G_T'(1)$. Or, pour tout $x\in]-2,2[$,

$$G_T'(x) = A\times\frac{2}{(2-x)^2}\times\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}$$

et donc $\mathbb{E}(T)=G_T'(1)=2A\left(\frac{1}{2-1}\right)^{A-1}=2A$.

Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est $2A$.

Partie III - Etude d'un second cas

III.1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n\leqslant k\right)$

Q37. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\left(\left(X_{n+1}=0\right),\left(X_{n+1}=1\right),\ldots,\left(X_{n+1}=M-1\right)\right)$ est un système complet d'événements.
Soit $k\in[\![0,A-1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P\left(S_{n+1}\leqslant k\right) &= \sum_{\ell=0}^{M-1}P\left(\left(S_{n+1}\leqslant k\right)\cap\left(X_{n+1}=\ell\right)\right) = \sum_{\ell=0}^{M-1}P\left(X_{n+1}=\ell\right)\times P_{\left(X_{n+1}=\ell\right)}\left(S_{n+1}\leqslant k\right) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1}P_{\left(X_{n+1}=\ell\right)}\left(S_{n+1}\leqslant k\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, sous la condition $X_{n+1}=\ell$, $S_{n+1}\leqslant k\Leftrightarrow S_n+\ell\leqslant k\Leftrightarrow S_n\leqslant k-\ell$. On a donc montré que

$$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_n \leqslant k-\ell) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell)$$

car, si $\ell \geqslant M$, alors $k-\ell \leqslant k-M \leqslant A-1-M < 0$ et donc $P(S_n \leqslant k-\ell) = 0$.

Q38. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, A-1]\!]$, $P(S_n \leqslant k) = \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+k}{n}$.

- Pour $k \in [\![0, A-1]\!]$, $P(S_1 \leqslant k) = P(X_1 \leqslant k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{M} = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1}\binom{k+1}{1}$.

  La proposition est vraie quand $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, A-1]\!]$, $P(S_n \leqslant k) = \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+k}{n}$. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} \leqslant k) &= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell) \text{ (d'après la question précédente)}\\
&= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{1}{M^{n+1}}\binom{(n+1)+k}{n+1} \text{ (d'après la formule admise par l'énoncé).}
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q39. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(T > n) \Leftrightarrow T \neq 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $S_k < A \Leftrightarrow T \neq 0$ et $S_n < A$ et donc l'événement $(T > n)$ est l'événement $(S_n < A) \cap \overline{(T = 0)}$. Ensuite, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(S_n < A) = P\left((S_n < A) \cap \overline{(T = 0)}\right) + P\left((S_n < A) \cap (T = 0)\right) = P(T > n) + P\left((S_n < A) \cap (T = 0)\right).$$

Vérifions alors que l'événement $(T = 0)$ est négligeable. $(T = 0) = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} (S_n < A)$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n < A) \subset (S_{n-1} < A)$. Par continuité décroissante, on en déduit que

$$P(T = 0) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (S_k < A)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n < A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n}.$$

Enfin, $\dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+A-1}{n} = \dfrac{(n+A-1)(n+A-2)\dots(n+1)}{(A-1)!M^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{A-1}}{(A-1)!M^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et car $M \geqslant 2$. Ceci montre que $P(T = 0) = 0$ puis que $P\left((S_n < A) \cap (T = 0)\right) = 0$ car $P\left((S_n < A) \cap (T = 0)\right) \leqslant P(T = 0)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leqslant A-1).$$

Sans préjuger de la convergence de la série, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n \leqslant A-1\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+A-1}{n} \left(\frac{1}{M}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+A-1}{(n+A-1)-n} \left(\frac{1}{M}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+A-1}{A-1} \left(\frac{1}{M}\right)^n = \sum_{m=A-1}^{+\infty} \binom{m}{A-1} \left(\frac{1}{M}\right)^{m-A+1} = M^{A-1} \sum_{m=A-1}^{+\infty} \binom{m}{A-1} \left(\frac{1}{M}\right)^m\\
&= M^{A-1} \frac{\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{M}\right)^A} \text{ (d'après la question Q30)}\\
&= \left(\frac{M}{M-1}\right)^A < +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci montre que T admet une espérance et que $\mathbb{E}(T) = \left(\frac{M}{M-1}\right)^A$.

