SESSION 2023

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1. On commence par vérifier que les matrices A et B ont le même format avec `assert` mais on pourrait s'en passer.

```
def produit(A:list, B:list) -> list:
    assert len(A) == len(B) == len(A[0]) == len(B[0])
    n = len(A)
    AB = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(n):
            ABij = 0 # element (i,j) de la matrice A*B
            for k in range(n):
                ABij += A[i][k] * B[k][j]
            ligne.append(ABij)
        AB.append(ligne)
    return AB
```

Q2. Rappelons que la matrice d'adjacence est une matrice A constituée de 0 et de 1 avec $A_{i,j} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant $i \to j$. Déterminer si un graphe est non-orienté revient donc à déterminer si la matrice d'adjacence est symétrique.

```
def oriente(A:list) -> bool:
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return False
    return True
```

Q3.

```
def distance(A:list, i:int, j:int) -> int:
    n = len(A)
    # On commence par construire la matrice identite de taille n
    # Cette matrice correspond a A^0
    Ap = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(n):
            if i==j:
                ligne.append(1)
            else:
                ligne.append(0)
            Ap.append(ligne)
    p = 0
    while Ap[i][j] == 0:
        Ap = produit(Ap, A)
        p += 1
    return p
```


Q4.

```
SELECT id FROM clients WHERE ville = 'Toulouse'
```

Q5.

```
SELECT c.email
FROM clients AS c
JOIN partenaires AS p
ON c.id = p.id_client
WHERE p.partenaire = 'SCEI'
```

EXERCICE II

Q6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^{-x} - x$. La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc injective et on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$. On note x_0 cette solution.

Q7. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y.$$

Par suite, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{2} \\ 2x - 2 \times \dfrac{x}{2} - e^{-x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{2} \\ e^{-x} = x \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_0 \\ y = \dfrac{x_0}{2} \end{array}\right. .$$

La fonction f admet un point critique et un seul, le point $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$. On pose $y_0 = \dfrac{x_0}{2}$.

Q8. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, si f est un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f. Ainsi, si f admet un extremum local, c'est nécessairement en le point $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$.

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Avec les notations de Monge, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$ puis $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} r(x_0, y_0) & s(x_0, y_0) \\ s(x_0, y_0) & t(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant, à savoir

$$\Delta = 4\left(2+e^{-x_0}\right) - 4 = 4\left(1+e^{-x_0}\right),$$

est strictement positif. On sait alors que f admet un extremum local en $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$. De plus, sa trace, à savoir $6+e^{-x_0}$, est strictement positive et on sait que cet extremum local est un minimum local.

Finalement, f admet un et un seul extremum local. Cet extremum local est un minimum local. Il est atteint en $\left(x_0, \dfrac{x_0}{2}\right)$ où x_0 est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$. La calculatrice fournit $x_0 = 0,567\ldots$

PROBLEME

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ avec $\alpha-1>-1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. De plus, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\alpha-1}}{x} = x^{\alpha-2}$ avec $\alpha-2<-1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q10. Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$, de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, on obtient

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_1^0 \frac{\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}}{1+\dfrac{1}{t}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\,dt = I(1-\alpha).$$

Q11. *Première tentative.* Pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ puis

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f_n(x) = (-1)^n$. La série numérique de terme général $\ell_n = (-1)^n$ est divergente. D'après le théorème d'interversion des limites, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q12. *Deuxième tentative.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0,1[$,

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}\right| = x^{\alpha-1}\left|\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\right| \leqslant \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\left(1+\left|(-1)^{n+1}x^{n+1}\right|\right) \leqslant \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}.$$

Pour $x \in]0,1[$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{2x^{\alpha-1}}{1+x}$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ (car intégrable sur $]0,1]$ d'après la question Q9). Ainsi,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est continue par morceaux sur $]0,1[$,
- la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ sur $]0,1[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
- il existe une fonction φ, continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0,1[$, $|S_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- chaque fonction S_n, $n \in \mathbb{N}$, est intégrable sur $]0,1[$,
- (la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1[$),
- la suite numérique $\left(\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = I(\alpha)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégration (en tenant compte de l'intégrabilité de chaque terme),

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{k+\alpha-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{x^{k+\alpha}}{\alpha+k}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

On a donc montré que,

$$\forall\alpha\in]0,1[,\ I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

Q13. Soit $\alpha\in]0,1[$. D'après la question Q10 et en tenant compte du fait que $1-\alpha\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
I(\alpha)+J(\alpha) = I(\alpha)+I(1-\alpha) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-\alpha+n}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p}\ \text{(en posant } p=n+1)\\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}\ \text{(la variable de sommation étant muette)}\\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

Q14. Soit $\alpha\in]0,1[$. $I(\alpha)+J(\alpha) = \displaystyle\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$.

D'après la question précédente, d'après le résultat admis par l'énoncé appliqué en prenant $x=0$ et en tenant compte de $\sin(\alpha\pi)\neq 0$ car $\alpha\pi\in]0,\pi[$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x\in]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

- $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x-1>-1$. Donc, la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- D'après un théorème de croissances comparées, $t^2\times t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=} O(1)$ et donc $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ou encore $\Gamma(x)$ existe. On a montré que la fronction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Soit $\alpha\in]0,1[$. Soit $\begin{array}{rccc} g_\alpha : & [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\end{array}$ de sorte que pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x,t)\,dt$.

- pour tout $x\in[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto g_\alpha(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto g_\alpha(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $(x,t)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|g_\alpha(x,t)| = \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\leqslant\dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après la question Q9).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est définie sur $[0,+\infty[$ (c'est-à-dire que pour chaque x de $[0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto g_\alpha(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$) et continue sur $[0,+\infty[$.

Q17. Soit $a>0$. La fonction g_α admet sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)=-\frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}.$$

De plus,

- pour tout $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$,
- pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\leqslant\dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-at}=\varphi_1(t)$.

La fonction φ_1 est continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$, équivalente à $t^{\alpha-1}$ en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction φ_1 est finalement intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f_α est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on a montré que la fonction f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et de plus,

$$\forall x>0,\ f'_\alpha(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\,dt.$$

Q18. Soit $x\geqslant 1$. En posant $u=xt$ et donc $t=\dfrac{u}{x}$ puis $dt=\dfrac{du}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned}0\leqslant f_\alpha(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}}{\frac{u}{x}+1}\,e^{-u}\,\frac{du}{x}=x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+x}e^{-u}\,du\\&\leqslant x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+1}e^{-u}\,du=f_\alpha(1)x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha-1<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(1)x^{\alpha-1}=0$. Le théorème des gendarmes alors permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)=0$.

Q19. La fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha<1$ et donc la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite. $\dfrac{e^{t}}{t^\alpha}\underset{t\to0}{=}O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt\right)=0.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Soit $\alpha\in]0,1[$. Soit $x>0$. D'après la question Q17,

$$\begin{aligned}f_\alpha(x)-f'_\alpha(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{t+1}e^{-xt}\,dt\\&=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\,\frac{du}{x}\ \text{(en posant } u=xt)\\&=\frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.\end{aligned}$$

Q21. • La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue (et intégrable) sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt - \int_0^x \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée la fonction $x \mapsto -\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$.

Mais alors, la fonction g_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt + e^x\left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right)\right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

et donc, pour tout $x > 0$, $g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$. La fonction g_α est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ $\quad(E)$.

• Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x)$. $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ (car $\alpha > 0$). De plus, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)$$

ou encore $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ et donc $e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x) = 0$.

• Puisque f_α et g_α, sont solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, $f_\alpha - g_\alpha$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation homogène $y - y' = 0$ et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) - g_\alpha(x) = \lambda e^x$. Enfin, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} (f_\alpha(x) - g_\alpha(x)) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$.

On a montré que $f_\alpha = g_\alpha$.

Q22. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\,dt = \Gamma(\alpha)e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$. Par continuité de f_α en 0 (d'après la question Q16) et intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ (d'après la question Q19), quand x tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = f_\alpha(0) = \lim_{x\to0,\ x>0} f_\alpha(x) = \lim_{x\to0,\ x>0} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt.$$

Q23. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(1-\alpha)$ et donc, d'après la question Q14 et la question précédente,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{ (formule des compléments).}$$

Q24. Quand $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient en particulier $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$ puis $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0$ par positivité de l'intégration). De plus, en posant $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ puis $dt = 2u\,du$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,2u du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

et donc, la variable de sommation étant muette,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

