

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1. On commence par vérifier que les matrices A et B ont le même format avec `assert` mais on pourrait s'en passer.

```
def produit(A:list, B:list) -> list:
    assert len(A) == len(B) == len(A[0]) == len(B[0])
    n = len(A)
    AB = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(n):
            ABij = 0 # element (i, j) de la matrice A*B
            for k in range(n):
                ABij += A[i][k] * B[k][j]
            ligne.append(ABij)
        AB.append(ligne)
    return AB
```

Q2. Rappelons que la matrice d'adjacence est une matrice A constituée de 0 et de 1 avec $A_{i,j} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant $i \rightarrow j$. Déterminer si un graphe est non-orienté revient donc à déterminer si la matrice d'adjacence est symétrique.

```
def oriente(A:list) -> bool:
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return False
    return True
```

Q3.

```
def distance(A:list, i:int, j:int) -> int:
    n = len(A)
    # On commence par construire la matrice identite de taille n
    # Cette matrice correspond a A^0
    Ap = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(n):
            if i==j:
                ligne.append(1)
            else:
                ligne.append(0)
        Ap.append(ligne)
    p = 0
    while Ap[i][j] == 0:
        Ap = produit(Ap, A)
        p += 1
    return p
```

Q4.

```
SELECT id FROM clients WHERE ville = 'Toulouse'
```

Q5.

```
SELECT c.email
FROM clients AS c
JOIN partenaires AS p
ON c.id = p.id_client
WHERE p.partenaire = 'SCEI'
```

EXERCICE II

Q6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^{-x} - x$. La fonction g est strictement décroissante sur \mathbb{R} en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur \mathbb{R} . La fonction g est donc injective et on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution sur \mathbb{R} .

La fonction g est continue sur \mathbb{R} en tant que somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Ainsi, la fonction g est continue sur \mathbb{R} et de plus $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)\right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Finalement, la fonction g s'annule une fois et une seule sur \mathbb{R} ou encore l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule sur \mathbb{R} . On note x_0 cette solution.

Q7. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y.$$

Par suite, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ 2x - 2 \times \frac{x}{2} - e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ e^{-x} = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = \frac{x_0}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

La fonction f admet un point critique et un seul, le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$. On pose $y_0 = \frac{x_0}{2}$.

Q8. La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} . Donc, si f est un extremum local en un point de \mathbb{R}^2 , ce point est un point critique de f . Ainsi, si f admet un extremum local, c'est nécessairement en le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

La fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Avec les notations de MONGE, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$ puis $s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} r(x_0, y_0) & s(x_0, y_0) \\ s(x_0, y_0) & t(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant, à savoir

$$\Delta = 4(2 + e^{-x_0}) - 4 = 4(1 + e^{-x_0}),$$

est strictement positif. On sait alors que f admet un extremum local en $(x_0, \frac{x_0}{2})$. De plus, sa trace, à savoir $6 + e^{-x_0}$, est strictement positive et on sait que cet extremum local est un minimum local.

Finalement, f admet un et un seul extremum local. Cet extremum local est un minimum local. Il est atteint en $(x_0, \frac{x_0}{2})$ où x_0 est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$. La calculatrice fournit $x_0 = 0,567\dots$

PROBLEME

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Soit $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $]0, 1[$. De plus, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ avec $\alpha - 1 > -1$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha-1}}{x} = x^{\alpha-2}$ avec $\alpha - 2 < -1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q10. Soit $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1[$, de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. En posant $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_1^0 \frac{1}{\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t} dt = I(1-\alpha).$$

Q11. Première tentative. Pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ puis

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = (-1)^n$. La série numérique de terme général $\ell_n = (-1)^n$ est divergente. D'après le théorème d'interversion des limites, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

Q12. Deuxième tentative. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} \right| = x^{\alpha-1} \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \right| \leq \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 + |(-1)^{n+1} x^{n+1}|) \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}.$$

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $\varphi(x) = \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x}$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$ (car intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question Q9). Ainsi,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est continue par morceaux sur $]0, 1[$,
- la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ sur $]0, 1[$ et la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$,
- il existe une fonction φ , continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, 1[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0, 1[$, $|S_n(x)| \leq \varphi(x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- chaque fonction S_n , $n \in \mathbb{N}$, est intégrable sur $]0, 1[$,
- (la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$),
- la suite numérique $\left(\int_0^1 S_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = I(\alpha).$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégration (en tenant compte de l'intégrabilité de chaque terme),

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{x^{k+\alpha}}{\alpha+k} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

On a donc montré que,

$$\forall \alpha \in]0, 1[, I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

Q13. Soit $\alpha \in]0, 1[$. D'après la question Q10 et en tenant compte du fait que $1 - \alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1 - \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-\alpha+n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} \text{ (en posant } p = n + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha-n} \text{ (la variable de sommation étant muette)} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \right) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \end{aligned}$$

Q14. Soit $\alpha \in]0, 1[$. $I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$

D'après la question précédente, d'après le résultat admis par l'énoncé appliqué en prenant $x = 0$ et en tenant compte de $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ car $\alpha\pi \in]0, \pi[$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

- $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x - 1 > -1$. Donc, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- D'après un théorème de croissances comparées, $t^2 \times t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ et donc $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ou encore $\Gamma(x)$ existe. On a montré que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q16. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Soit $g_\alpha : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$(x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$$

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} g_\alpha(x, t) dt.$$

- pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g_\alpha(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g_\alpha(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$,
- pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|g_\alpha(x, t)| = \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} = \varphi_0(t)$ où φ_0 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question Q9).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est définie sur $]0, +\infty[$ (c'est-à-dire que pour chaque x de $]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g_\alpha(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$) et continue sur $]0, +\infty[$.

Q17. Soit $\alpha > 0$. La fonction g_α admet sur $[\alpha, +\infty[\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et pour tout $(x, t) \in [\alpha, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt}.$$

De plus,

- pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$,
- pour tout $(x, t) \in [\alpha, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt} \leq \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-\alpha t} = \varphi_1(t)$.

La fonction φ_1 est continue par morceaux et positive sur $]0, +\infty[$, équivalente à $t^{\alpha-1}$ en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction φ_1 est finalement intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f_α est de classe C^1 sur $[\alpha, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on a montré que la fonction f_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et de plus,

$$\forall x > 0, f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt.$$

Q18. Soit $x > 0$. En posant $u = xt$ et donc $t = \frac{u}{x}$ puis $dt = \frac{du}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq f_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{x} = \Gamma(\alpha) x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque $-\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha) x^{-\alpha} = 0$. Le théorème des gendarmes alors permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$.

Q19. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite. $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \right) = 0.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Soit $x > 0$. D'après la question Q17,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{t+1} e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{x} \text{ (en posant } u = xt) \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

Q21. • La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue (et intégrable) sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée la fonction $x \mapsto -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$.

Mais alors, la fonction g_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + e^x \left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha} \right) \right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

et donc, pour tout $x > 0$, $g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$. La fonction g_α est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ (E).

• Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) \cdot \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t})$ (car $\alpha > 0$). De plus, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t} dt\right)$$

ou encore $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x})$ et donc $e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = 0$.

• Puisque f_α et g_α , sont solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, $f_\alpha - g_\alpha$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation homogène $y - y' = 0$ et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) - g_\alpha(x) = \lambda e^x$. Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_\alpha(x) - g_\alpha(x)) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$.

On a montré que $f_\alpha = g_\alpha$.

Q22. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$. Par continuité de f_α en 0 (d'après la question Q16) et intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ (d'après la question Q19), quand x tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = f_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Q23. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1} e^{-t} dt = \Gamma(1-\alpha)$ et donc, d'après la question Q14 et la question précédente,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{ (formule des compléments).}$$

Q24. Quand $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient en particulier $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$ puis $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ par positivité de l'intégration). De plus, en posant $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ puis $dt = 2u du$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

et donc, la variable de sommation étant muette,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$