SESSION 2023

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1. • Soit $(P,Q) \in E^2$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $x^2P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On en déduit que la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et donc sur $[0,+\infty[$. Par suite, $\langle P,Q\rangle$ existe dans $\mathbb{R}$.

Ceci montre que $\langle\ |\ \rangle$ est bien une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(P,Q) \in E^2$. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}\,dx = \langle Q,P\rangle$. $\langle\ |\ \rangle$ est symétrique.

• Soient $(P_1,P_2,Q) \in E^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégration et au vu de la convergence de toutes les intégrales considérées,

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1+\mu P_2,Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P_1(x)+\mu P_2(x))\,Q(x)e^{-x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} P_1(x)Q(x)e^{-x}\,dx + \mu\int_0^{+\infty} P_2(x)Q(x)e^{-x}\,dx\\ &= \lambda\langle P_1,Q\rangle + \mu\langle P_2,Q\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $P \in E$. $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} (P(x))^2e^{-x}\,dx \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive) et de plus,

$$\begin{aligned}\langle P,P\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} (P(x))^2e^{-x}\,dx = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[,\ (P(x))^2e^{-x} \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[,\ P(x) = 0\\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Donc, $\langle\ |\ \rangle$ est définie positive.

Ainsi, $\langle\ |\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E et donc $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Une base de $\mathbb{R}_1[X]$ est (P_0,P_1) où $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. On note (E_0,E_1) l'orthonormalisée de la famille libre (P_0,P_1).

• $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ puis $\|P_0\| = 1$. Donc, $E_0 = \dfrac{1}{\|P_0\|}P_0 = 1$.

Ensuite, $\langle P_1,E_0\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1! = 1$ puis $P_1 - \langle P_1,E_0\rangle E_0 = X-1$.

Ensuite, $\|X-1\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x-1)^2e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx - 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2!-2+1 = 1$ et donc $E_1 = \dfrac{1}{\|X-1\|}(X-1) = X-1$.

• On sait alors que $P_F\left(X^2\right) = \left\langle X^2,E_0\right\rangle E_0 + \left\langle X^2,E_1\right\rangle E_1$. $\left\langle X^2,E_0\right\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = 2$ et $\left\langle X^2,E_1\right\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2(x-1)e^{-x}\,dx = 3!-2! = 4$. Donc,

$$P_F\left(X^2\right) = 2\times 1 + 4(X-1) = 4X-2.$$

Q3. Puisque $P_F\left(X^2\right) \in F$ et $X^2 - P_F\left(X^2\right) \in F^{\perp}$, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que

$$\left\|X^2\right\|^2 = \left\|X^2 - P_F\left(X^2\right) + P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 + \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$$

puis que $\left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$.

Ensuite, $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^2 - ax - b\right)^2 e^{-x}\, dx = \inf_{P\in F} \left\|X^2 - P\right\|^2$. On sait que ce dernier nombre est le carré de la distance de X^2 à F et qu'il est égal à $\left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2$ ou encore à $\left\|X^2\right\|^2 - \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$.

$\displaystyle\left\|X^2\right\|^2 = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\, dx = 4! = 24$ et $\displaystyle\left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \int_0^{+\infty} (4x-2)^2 e^{-x}\, dx = 4(4\times 2! - 4\times 1! + 1) = 20$. Donc,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^2 - ax - b\right)^2 e^{-x}\, dx = 24 - 20 = 4.$$

EXERCICE II

Q4. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Si $m = n$, l'événement $((Z = m) \cap (T = n))$ est l'événement $X = Y = m$. Puisque les variables X et Y sont indépendantes,

$$P((Z = m) \cap (T = m)) = P((X = m) \cap (Y = m)) = P(X = m) \times P(Y = m) = (pq^m)^2 = p^2 q^{2m}.$$

Si $m < n$, l'événement $((Z = m) \cap (T = n))$ est vide (car $Z \geqslant T$) et donc $P((Z = m) \cap (T = n)) = 0$. Enfin, si $m > n$, l'événement $((Z = m) \cap (T = n))$ est l'événement $((X = m) \cap (Y = n)) \cup ((X = n) \cap (Y = m))$ puis, les événements $(X = m) \cap (Y = n)$ et $(X = n) \cap (Y = m)$ étant disjoints,

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = P(X = m) \times P(Y = n) + P(X = n) \times P(Y = m) = pq^m \times pq^n + pq^n \times pq^m = 2p^2 q^{n+m}.$$

En résumé, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $P((Z = m) \cap (T = n)) = \begin{cases} 2p^2 q^{n+m} \text{ si } m > n \\ p^2 q^{2m} \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m < n \end{cases}$.

Q5. $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Ensuite, $P(Z = 0) = P(X = Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = p^2$.

Soit alors $m \in \mathbb{N}^*$. Puisque $(T = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, en tenant compte de $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}
P(Z = m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Z = m) \cap (Y = n)) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} P((Z = m) \cap (Y = n)) + P((Z = m) \cap (Y = m)) + \sum_{n=m+1}^{+\infty} P((Z = m) \cap (Y = n)) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} + p^2 q^{2m} = 2p^2 q^m \frac{1 - q^m}{1 - q} + p^2 q^{2m} = 2pq^m\left(1 - q^m\right) + p^2 q^{2m} \\
&= pq^m\left(2\left(1 - q^m\right) + pq^m\right) = pq^m\left(2 + (-2 + p)q^m\right) = pq^m\left(2 - (1 + q)q^m\right),
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $m = 0$. Donc,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ P(Z = m) = pq^m\left(2 - q^m - q^{m+1}\right).$$

PROBLEME

Partie I

Q6. La matrice A est symétrique réelle et donc la matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

$\Pi_1^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_1$. Donc, Π_1 est une matrice de projecteur.

$\Pi_2^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_2$. Donc, Π_2 est une matrice de projecteur.

$\Pi_1 + 5\Pi_2 = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A.$

$\Pi_1 + \Pi_2 = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$

$\Pi_1\Pi_2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$

Q7. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(P(u)) &\Rightarrow (P(u))(x) \Rightarrow Q(u)((P(u))(x)) = 0 \Rightarrow (Q(u) \circ P(u))(x) = 0 \Rightarrow ((QP)(u))(x) = 0 \\ &\Rightarrow ((PQ)(u))(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u)). \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$. De même, $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$. Les polynômes P et Q sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$. En évaluant en u, on obtient $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E$ puis en évaluant en x, on obtient

$$x = (U(u) \circ P(u))(x) + (V(u) \circ Q(u))(x) \quad (*).$$

Posons $y = (V(u) \circ Q(u))(x)$ et $z = (U(u) \circ P(u))(x)$. Puisque deux polynômes en u commutent (et en tenant compte de $P(u) \circ Q(u)(x) = ((PQ)(u))(x) = 0$),

$$P(u)(y) = V(u)((P(u) \circ Q(u))(x)) = 0$$

et de même, $Q(u)(z) = U(u)(P(u) \circ Q(u))(x)) = 0$. Donc, $y \in \mathrm{Ker}(P(u))$ et $z \in \mathrm{Ker}(Q(u))$. On a montré que, pour tout $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$, il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}(P(u)) \times \mathrm{Ker}(Q(u))$ tel que $x = y + z$ et donc $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$. $(*)$ fournit directement $x = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u)) = \{0\}$. On a montré que

$$\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)).$$

Q8. $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$. Puisque P_1 et P_2 sont premiers entre eux, il en est de même de Q_1 et Q_2. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes R_1 et R_2 tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Q9. • Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Puisque deux polynômes en u commutent,

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) = R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ P_i^{k_i}(u) \circ \prod_{l \neq i,\ l \neq j} P_l^{k_l}(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ \prod_{l \neq i,\ l \neq j} P_l^{k_l}(u) \circ \pi_u(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\pi_u(u) = 0$ par définition de π_u.

• Puisque $R_1Q_1 + \ldots + R_mQ_m = 1$, en évaluant en u, on obtient $R_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + R_m(u) \circ Q_m(u) = \mathrm{Id}_E$ ou encore $p_1 + \ldots + p_m = \mathrm{Id}_E$.

• Soit $i \in [\![1, m]\!]$.

$$p_i^2 = p_i \circ \left(\mathrm{Id}_E - \sum_{j \neq i} p_j\right) = p_i - \sum_{j \neq i} p_i \circ p_j = p_i$$

et donc p_i est un projecteur.

Q10. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont deux à deux premiers entre eux, car deux à deux sans racine commune dans $\mathbb{C}$. De plus, $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de u d'après le théorème de Cayley-Hamilton ou encore $\mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = E$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m.$$

Q11. D'après la question Q9, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)\,.$$

Ceci montre que $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(p_i)$.

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Montrons que $\mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j)$. Il existe $(x_j)_{j \neq i} \in E^{m-1}$ tel que $x = \displaystyle\sum_{j \neq i} p_j\,(x_j)$. D'autre part, $x \in \mathrm{Im}\,(p_i)$ et donc $x = p_i(x)$. On en déduit, d'après la question Q9, que

$$x = p_i(x) = \sum_{j \neq i} p_i\,(p_j\,(x_j)) = 0.$$

On a montré que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{Im}\,(p_i) \cap \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(p_j) = \{0\}$ et finalement que

$$E = \mathrm{Im}\,(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\,(p_m)\,.$$

Q12. On sait que π_u est de la forme $\pi_u = (X - \lambda_1)^{k_1} \ldots (X - \lambda_m)^{k_m}$ avec $1 \leqslant k_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, 1 \leqslant k_m \leqslant \alpha_m$.

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, puisque deux polynômes en u commutent, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\,(p_i(x)) &= (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i} \circ Q_i(u) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i - k_i} \circ R_i(u)(x) \\ &= \pi_u(u) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i - k_i} \circ R_i(u)(x) = 0\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\,(p_i) \subset N_i$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $i_0 \in [\![1, m]\!]$ tel que $\mathrm{Im}\,(p_{i_0}) \underset{\neq}{\subset} N_{i_0}$ et donc tel que $\dim\,(\mathrm{Im}\,(p_{i_0})) < \dim\,(N_{i_0})$. On a alors

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{m} (N_i) > \sum_{i=1}^{m} \dim\,(\mathrm{Im}\,(p_i))$$

ce qui contredit l'égalité $E = \mathrm{Im}\,(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\,(p_m)$. On a montré que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{Im}\,(p_i) = N_i$.

Partie II

Q13. Puisque u est diagonalisable, on sait que $\pi_u = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$.

Q14. Les pôles de $\dfrac{1}{\pi_u}$ sont simples. La décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{\pi_u}$ est de la forme

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}.$$

où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$. De plus, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_k = \displaystyle\lim_{x \to \lambda_k} \frac{x - \lambda_k}{\pi_u(x)} = \lim_{x \to \lambda_k} \frac{1}{Q_k(x)} = \frac{1}{Q_k\,(\lambda_k)} = \theta_k$. Donc,

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{Q_k\,(\lambda_k)\,(X - \lambda_k)}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par π_u, on obtient

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_u}{Q_k\,(\lambda_k)\,(X - \lambda_k)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{Q_k}{Q_k\,(\lambda_k)}.$$

Ainsi, si on pose $R_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, alors $R_1Q_1 + \ldots + R_mQ_m = 1$. Les polynômes (constants) R_1, ..., R_m, conviennent. Les projecteurs associés sont les $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u) = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Q15. Si $m \geqslant 2$. Alors, $m - 1 \geqslant 1$ puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}$ et X sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à $m-1$ (car pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\deg(Q_i) = m - 1$).

Soit $j \in [\![1, m]\!]$. Puisque pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $Q_i = \displaystyle\prod_{k \neq i} (X - \lambda_k)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}\right)(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_j)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_i)\,\delta_{i,j}}{Q_i(\lambda_i)} = \lambda_j.$$

Ainsi, les deux polynômes $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)}$ et X, de degrés inférieurs ou égaux à $m-1$, prennent la même valeur en chacun des m réels deux à deux distincts λ_1, ..., λ_m. On en déduit que ces deux polynômes sont égaux et donc

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)} \quad (*).$$

Si $m = 1$, le résultat est faux car $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i}{Q_i(\lambda_i)} = \frac{\lambda_1 Q_1}{Q_1(\lambda_1)} = \frac{\lambda_1 \times 1}{1} = \lambda_1 \neq X$.

Soit $m \geqslant 2$. En évaluant en u les deux membres de $(*)$, on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $m = 1$ car si u est diagonalisable et admet λ_1 pour unique valeur propre, alors u et $\lambda_1 \mathrm{Id}_E$ coïncident sur une base de E puis $u = \lambda_1 \mathrm{Id}_E = \lambda_1 p_1$.

Q16.

a) A est symétrique réelle et donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_4.$$

b) Par suite, le polynôme $X^2 - 4$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Le polynôme minimal π_A, de la matrice A, est un diviseur unitaire de ce polynôme, de degré supérieur ou égal à 1. Donc, π_A est soit $X - 2$, soit $X + 2$, soit $X^2 - 4$. Maintenant, $A \neq 2I_4$ et $A \neq -2I_4$ et donc $\pi_A \neq X - 2$ et $\pi_A \neq X + 2$. Il ne reste que

$$\pi_A = X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2).$$

On prend alors $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ puis $P_1 = Q_2 = X + 2$ et $P_2 = Q_1 = X - 2$. Ensuite,

$$\Pi_1 = \frac{1}{Q_1(\lambda_1)} Q_1(A) = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_2 = \frac{1}{Q_2(\lambda_2)} Q_2(A) = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Soit $q \geqslant 1$. On sait que $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$ et que $A = -2\Pi_1 + 2\Pi_2$. Puisque les matrices Π_1 et Π_2 commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit (en tenant compte du fait que Π_1 et Π_2 sont idempotents),

$$A^q = (-2\Pi_1 + 2\Pi_2)^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-2)^k 2^{q-k} \Pi_1^k \Pi_2^{q-k} = (-2)^q \Pi_1^q + 2^q \Pi_2^q = (-2)^q \Pi_1 + 2^q \Pi_2.$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $q = 0$ car $(-2)^0 \Pi_1 + 2^0 \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_2 = I_4 = A^0$. Donc,

$$\forall q \in \mathbb{N},\ A^q = (-2)^q \Pi_1 + 2^q \Pi_2.$$

Q17. Posons $p = \deg(\pi_v) \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. La division euclidienne de P par π_v s'écrit $P = Q\pi_v + R$ où $(Q, R) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $\deg(R) < p$. En évaluant en v, on obtient

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v) \in \text{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \dots, v^{p-1}\right).$$

Ainsi, $\mathbb{C}[v] \subset \text{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \dots, v^{p-1}\right)$ puis $\mathbb{C}[v] = \text{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, v, \dots, v^{p-1}\right)$ puis $\dim(\mathbb{C}[v]) \leqslant p$. Montrons alors que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, v, \dots, v^{p-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[v]$. Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ puis $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$.

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow P(v) = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$$

car $\deg(P) < p = \deg(\pi_v)$ et par définition de π_v.

Ainsi, la famille $\left(\mathrm{Id}_E, v, \dots, v^{p-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[v]$ et finalement une base de $\mathbb{C}[v]$. On en déduit que $\dim(\mathbb{C}[v]) = p = \deg(\pi_v)$.

Q18. Les p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des polynômes en u ou encore les p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des éléments de $\mathbb{C}[u]$. Ensuite, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, Q_i est un polynôme non nul de degré strictement inférieur au degré de π_u. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $p_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u) \neq 0$.

Vérifions que la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = 0$ $(*)$.
Soit $i \in [\![1, m]\!]$. On compose les deux membres de $(*)$ à gauche par p_i. Puisque pour $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0$ et que $p_i^2 = p_i$, on obtient $\alpha_i p_i = 0$ puis $\alpha_i = 0$ car $p_i \neq 0$.

Ainsi, la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[u]$. De plus, $\text{card}(p_1, \dots, p_m) = m = \dim(\mathbb{C}[u])$ (d'après la question précédente) et donc

$$\text{la famille } (p_1, \dots, p_m) \text{ est une base de } \mathbb{C}[u].$$

Q19. Soit $n \geqslant 2$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice élémentaire $E_{1,2}$. u est nilpotent d'indice 2 puis $\pi_u = X^2$. Dans ce cas, $\deg(\pi_u) = 2$ puis $\dim(\mathbb{C}[u]) = 2$ d'après la question Q17.

D'autre part, $m = 1$ (u a une valeur propre et une seule, à savoir 0) et donc $\text{card}(p_1, \dots, p_m) = 1 < 2 = \dim(\mathbb{C}[u])$. Dans ce cas, $(p_1, \dots, p_m)$ n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q20. Soit $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_m)$. Posons $P = X^m + \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} P(u) &= u^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k u^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^m f_i + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \lambda_i^k\right) f_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé un polynôme P, à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de u. On sait alors que u est diagonalisable.

