SESSION 2017

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1

Q1 La fonction $f_1 : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $f_2 : t \mapsto \sin t$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f = f_2 \circ f_1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier, f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

De même, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes le sont et en particulier, g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_{(x_0,y_0)}(f) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 \cos\left(x_0^2 - y_0^2\right) & -2y_0 \cos\left(x_0^2 - y_0^2\right) \end{pmatrix} \\ &= 2\cos\left(x_0^2 - y_0^2\right) \begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et en posant $g = (g_1, g_2)$

$$\mathrm{Jac}_{(x_0,y_0)}(g) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Q2 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f \circ g(x,y) = \sin\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right) = \sin(4xy)$.

Posons $h = f \circ g$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$dh_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy = 4y_0 \cos(4x_0y_0)\,dx + 4x_0\cos(4x_0y_0)\,dy$$

ou encore

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ dh_{(x_0,y_0)}(u,v) = 4\cos(4x_0y_0)(y_0u + x_0v).$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ d(f\circ g)_{(x,y)}(u,v) = 4\cos(4xy)(yu + xv).}$$

Retrouvons ce résultat à partir des matrices jacobiennes de f et g. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f\circ g) &= \mathrm{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \mathrm{Jac}_{(x,y)}(g) \\ &= 2\cos\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)\begin{pmatrix} x+y & -(x-y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\cos(4xy)\begin{pmatrix} x+y-x+y & x+y+x-y \end{pmatrix} = 4\cos(xy)\begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et on retrouve $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial x}(x,y) = 4y\cos(4xy)$ et $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial y}(x,y) = 4x\cos(4xy)$.

EXERCICE 2

Q3 Pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2q^2}$.

- Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{p,q} \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $u_{p,q}$, $q \geqslant 1$, converge et

$$\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6p^2}.$$

- La série de terme général $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6p^2}$, $p \in \mathbb{N}^*$, converge et a pour somme $\dfrac{\pi^4}{36}$.

On sait alors que la suite $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2q^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

Q4 Pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $v_{p,q} = \dfrac{1}{p^2+q^2}$. Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $v_{p,q} \in \mathbb{R}^+$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La série de terme général $\dfrac{1}{p^2+q^2}$, $q \geqslant 1$, converge et

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2} \geqslant \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+2pq+q^2} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^2} &= \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\\ &\geqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{p+1}\ \text{(série télescopique)}.\end{aligned}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{p+1}$, $p \geqslant 1$, est divergente. Il en est de même de la série de terme général $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}$, $p \geqslant 1$.

On en déduit que la suite $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

PROBLÈME : séries trigonométriques

Partie I - Exemples

Q6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\cos(nx) + \dfrac{1}{3^n}\sin(nx)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}|\cos(nx)| + \frac{1}{3^n}|\sin(nx)| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leqslant 2\times\frac{1}{2^n},$$

puis $\|f_n\|_\infty \leqslant 2\times\dfrac{1}{2^n}$. Puisque la série géométrique de terme général $2\times\dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $p \geqslant 2$ fixé. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{e^{ix}}{p}\right| = \dfrac{1}{p} < 1$. Donc, la série géometrique de terme général $\left(\dfrac{e^{ix}}{p}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{e^{ix}}{p}} = p\frac{p-e^{-ix}}{|p-e^{ix}|^2} = p\frac{p-\cos x+i\sin x}{(p-\cos x)^2+\sin^2 x} = p\frac{p-\cos x+i\sin x}{p^2+1-2p\cos x}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right)\\ &= 2\frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\sin(nx) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}e^{inx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n\right)\\ &= 3\frac{\sin x}{10-6\cos x}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}+\frac{3\sin x}{10-6\cos x}.}$$

Q6 Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \exp(\cos x)\cos(\sin x) &= \mathrm{Re}\left(\exp(\cos x)e^{i\sin x}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\left(e^{ix}\right)}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{ix}\right)^n}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}.\end{aligned}$$

Q7 Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_n=\dfrac{1}{n+1}$. La suite (a_n) est de limite nulle mais la série numérique de terme général $a_n\cos(n\times 0)=\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, diverge. Donc, la série de fonctions de terme général $x\mapsto a_n\cos(nx)$, $n\in\mathbb{N}$, ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Q8 Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, posons $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en posant $x_n=\dfrac{\pi}{2n}$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup\left\{\frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}},\ x\in\mathbb{R}\right\} \geqslant \frac{|\sin(x_n)|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

qui est le terme général d'une série divergente. Donc, la série de fonctions de terme général $x\mapsto\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Propriétés

Q9 Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, posons $f_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et pour tout réel x,

$$|f_n(x)|\leqslant|a_n|\,|\cos(nx)|+|b_n|\,|\sin(nx)|\leqslant|a_n|+|b_n|.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty\leqslant|a_n|+|b_n|$ qui est, par hypothèse, le terme général d'une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}$, converge normalement (et en particulier, uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}$.

Q10 Le résultat est clair si $a = b = 0$. Sinon, pour tout x réel,

$$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\alpha)|$$

où α est un réel tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (α existe car $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$). Mais alors, pour tout réel x

$$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\alpha)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

avec égalité effectivement obtenue si $x = \alpha$. Donc, le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |a\cos x + b\sin x|$ existe et est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q11 Par hypothèse, la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on en déduit que la série numérique de terme général $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| = \sqrt{a_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

la série numérique de terme général $|a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, converge ou encore la série numérique de terme général a_n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. De même, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, la série numérique de terme général b_n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. En particulier, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

Q12 Chaque fonction $f_n\ :\ x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $\mathbb{R}$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx+2n\pi) + b_n\sin(nx+2n\pi)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = f(x)$$

et donc f est 2π-périodique. Finalement, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Q13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(2nx))\ dx = \pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

On note que pour $n = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\ dx = 2\pi$.

Soient k et n deux entiers naturels pas nécessairement distincts (erreur d'énoncé). La fonction $x \mapsto \sin(kx)\cos(nx)$ est impaire et donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$.

Q14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, la série de fonctions de terme général $x \mapsto f_k(x)\cos(nx) = a_k\cos(kx)\cos(nx) + b_k\sin(kx)\cos(nx)$, converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$. On peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\cos(nx)\ dx\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\ dx\right) = \frac{1}{\pi}\times\pi a_n\\ &= a_n.\end{aligned}$$

De même,

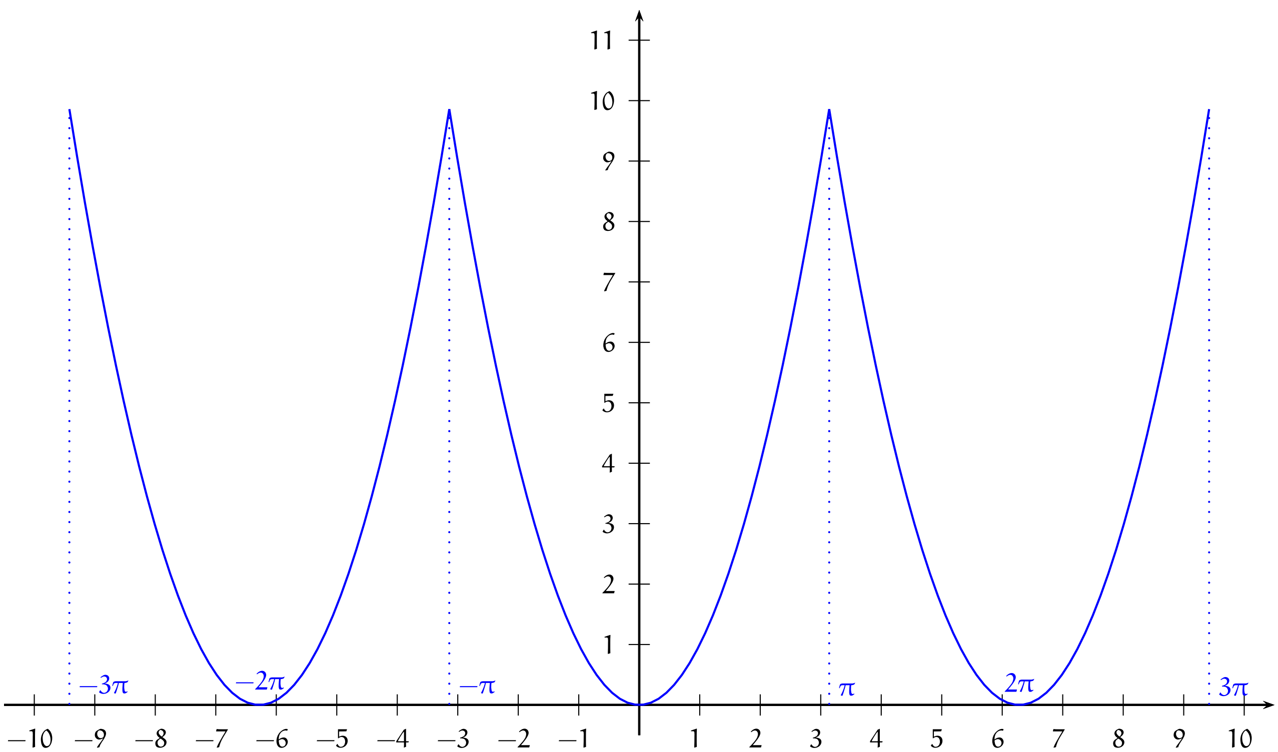
$$\begin{aligned}\alpha_0(f) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\ dx\right) = \frac{1}{\pi}\times 2\pi a_0\\ &= 2a_0.\end{aligned}$$

Q15 Puisque la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g, la question précédente, appliquée à la fonction g, montre immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(g) = \alpha_n(f)$ et $\beta_n(g) = \beta_n(f)$.

Q16 Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que la série de fonctions trigonométriques de l'énoncé converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(g) = \alpha_n(f)$ et $\beta_n(g) = \beta_n(f)$ ou encore $\alpha_n(f-g) = 0$ et $\beta_n(f-g)$ (la linéarité des applications α_n et β_n étant claire). D'après le résultat admis par l'énoncé, $f - g = 0$ et donc $f = g$.

Q17 Supposons f paire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = 0$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est impaire et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$.

Q18 **Graphe de f.**



f est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et est paire. Donc, pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)\right) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n(f)\cos(nx).$$

$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une double intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned}\alpha_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\ dx\right)\\ &= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x(-\sin(nx))\ dx = \frac{4}{n\pi}\left(\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\ dx\right)\\ &= \frac{4}{n\pi}\times\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} - 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout réel x,

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

De plus, puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge, la série de fonctions ci-dessus converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Q19 Pour $x=0$, on obtient $0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Q20 La fonction $f\,:\,x\mapsto\frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 ($\frac{\ln(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{\sim}1$). Donc, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$ et en particulier sur $]0,1[$.

Pour tout réel x de $]0,1[$,

$$f(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$, posons $f_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}$ de sorte que $f=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$.

- Chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- La série de fonctions de terme général f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f et de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- Enfin,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1|f_n(x)|\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme et d'après la question précédente,,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\\&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

Q21 La question 18 fournit un exemple de série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique mais non dérivable sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en les $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc, la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$.

Supposons de plus que les séries numériques de termes généraux respectifs na_n et nb_n soient absolument convergentes. En particulier, les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |na_n|$ et $|b_n| \leqslant |nb_n|$).

- La série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, est converge normalement et en particulier simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La série des dérivées $f'_n : x \mapsto nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, est normalement et en particulier uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ (car les séries numériques de termes généraux respectifs nb_n et $-na_n$ sont absolument convergentes).

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)\right).$$

Q22 La série numérique de terme général $\dfrac{n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente. Donc, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx).$$

Donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \cos(nx) &= \left(\frac{3\sin x}{10 - 6\cos x}\right)' = \frac{3}{2}\left(\frac{\sin x}{5 - 3\cos x}\right)' = \frac{3}{2} \times \frac{\cos x(5 - 3\cos x) - \sin x(3\sin x)}{(5 - 3\cos x)^2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{5\cos x - 3}{(5 - 3\cos x)^2}.\end{aligned}$$

