SESSION 2015

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

I.1. $21 = 16 + 4 + 1 = 2^4 + 2^2 + 1$ et donc $21 = \overline{10101}_2$.

I.2. Tableau complété.

k	1	2	3
c_k	6	5	2
t_k	[6]	[6 5]	[6 5 2]
n_k	25	2	0

I.3. Soit $n > 0$.

I.3.a. Dans la boucle while de mystère$(n, 10)$, on obtient successivement les différents chiffres de n en base 10. Puisque n a un nombre fini de chiffres en base 10, la boucle while se termine.

I.3.b. Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $n_k \leqslant \dfrac{n}{10^k}$.

- $n_0 = n \leqslant \dfrac{n}{10^0}$ et l'inégalité est vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Supposons que $n_k \leqslant \dfrac{n}{10^k}$. Alors

$$n_{k+1} = E\left(\frac{n_k}{10}\right) \leqslant \frac{n_k}{10} \leqslant \frac{n}{10^{k+1}}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Par définition de p, $n_{p-1} > 0$ et $n_p = 0$. Puisque $n_p = E\left(\dfrac{n_{p-1}}{10}\right)$, on a donc $1 \leqslant n_{p-1} \leqslant 9$ puis $1 \leqslant n_{p-1} \leqslant \dfrac{n}{10^{p-1}}$ puis $10^{p-1} \leqslant n$ et donc

$$p \leqslant 1 + \log(n).$$

I.4. Fonction somme_chiffres.

```
def somme_chiffres(n)
    """ Données : n > 0
        Résultat : somme des chiffres de n en base 10 """
    s = 0
    while n > 0 :
        c = n % 10
        s = s + c
        n = n // 10
    return s
```


I.5. Version recursive.

```
def somme_rec(n)
    """ Données : n ⩾ 0 un entier
        Résultat : somme des chiffres de n en base 10 """
    if n > 0 :
        return (n % 10)+somme_rec(n // 10)
    else :
        return 0
```

EXERCICE II

II.1. ${}^{t}AA' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' + bb' & ab' + cd' \\ ba' + dc' & cc' + dd' \end{pmatrix}$ et donc

$$(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'.$$

II.2. $(\,|\,)$ est donc le produit scalaire canonique. Par suite, la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une base orthonormée.

$\mathscr{T}$ est le sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. D'après ce qui précède, $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une base orthonormée de $\mathscr{T}$ et $(E_{2,1})$ est une base orthonormée de $\mathscr{T}^{\perp}$.

II.3. On sait que

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{T}}(A) &= (A|E_{1,1})\,E_{1,1} + (A|E_{1,2})\,E_{1,2} + (A|E_{2,2})\,E_{2,2} \\ &= E_{1,1} + 2E_{1,2} + 4E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis

$$d\,(A, \mathscr{T}) = \|A - P_{\mathscr{T}}(A)\| = \|3E_{2,1}\| = 3.$$

Problème III. Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vers $GL_n(\mathbb{R})$

Partie préliminaire

III.1. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et donc $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ puis $n\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty n\|B\|_\infty$ ou encore $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$. On a montré que $\|\ \|$ est une norme d'algèbre.

III.2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On sait alors que toute série absolument convergente d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est convergente.

III.3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\|\ \|$ est multiplicative, pour tout entier naturel k,

$$0 \leqslant \left\|\frac{1}{k!}M^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|M^k\right\| \leqslant \frac{\|M\|^k}{k!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{\|M\|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $e^{\|M\|}$). On en déduit que la numérique de terme général $\left\|\dfrac{1}{k!}M^k\right\|$, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore que la série de matrices de terme général $\dfrac{1}{k!}M^k$, $k \in \mathbb{N}$, converge absolument. D'après la question précédente, la série de matrices de terme général $\dfrac{1}{k!}M^k$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

Première partie

III.4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On sait que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. Donc il existe $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PTP^{-1}$. Pour tout entier p, on a alors

$$P\left(\sum_{k=0}^{p} T^k\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{p} PT^kP^{-1} = \sum_{k=0}^{p}\left(PTP^{-1}\right)^k \quad (*).$$

Quand p tend vers $+\infty$, le membre de droite de cette égalité tend vers $\exp\left(PTP^{-1}\right) = \exp(M)$. D'autre part, l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait alors que l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, le membre de gauche de l'égalité $(*)$ tend vers $P \times \exp(T) \times P^{-1}$. Ainsi, $\exp(M) = P \times \exp(T) \times P^{-1}$ et en particulier, $\exp(M)$ est semblable à $\exp(T)$. Donc,

$$\det(\exp(M)) = \det(\exp(T)) = e^{\lambda_1} \times \ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}(M)}.$$

III.5. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(A) = 3(-63+55) + (42-30) = -24 + 12 = -12 < 0.$$

S'il existe une matrice B à coefficients réels telle que $B^2 = A$, alors $\det(A) = (\det(B))^2 \geqslant 0$ (car $\det(B)$ est un réel) ce qui n'est pas. Donc, il n'existe pas une matrice B à coefficients réels telle que $B^2 = A$.

S'il existe une matrice M à coefficients réels telle que $\exp(M) = A$, alors $\det(A) = \exp(\mathrm{Tr}(M)) > 0$ (car $\mathrm{Tr}(M)$ est un réel) ce qui n'est pas. Donc, il n'existe pas une matrice M à coefficients réels telle que $\exp(M) = A$.

Deuxième partie

III.6.

III.6.a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \alpha 3^x e^{i\pi x} + \beta x^2 2^x$. Alors, f est un élément de F et pour tout entier naturel n,

$$f(n) = \alpha 3^n e^{i\pi n} + \beta n^2 2^n = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n.$$

III.6.b. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $(k, \rho, \theta) \in \{0,1,2\} \times]0, +\infty[\times]0, 2\pi]$. Pour tout réel x, posons $f_{k,\rho,\theta}(x) = x^k \rho^x e^{i\theta x}$ puis $g_{k,\rho,\theta}(x) = f_{k,\rho,\theta}(x + x_0)$.

$g_{0,\rho,\theta} = \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{0,\rho,\theta} \in F$, $g_{1,\rho,\theta} = \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{1,\rho,\theta} + x_0 \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{0,\rho,\theta} \in F$ et $g_{2,\rho,\theta} = \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{2,\rho,\theta} + 2x_0 \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{1,\rho,\theta} + x_0^2 \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} f_{1,\rho,\theta} \in F$.
Ainsi, si f est l'un des $f_{k,\rho,\theta}$, alors la fonction $x \mapsto f((x + x_0)$ est un élément de F. Il en est de même de toute combinaison linéaire des $f_{k,\rho,\theta}$ et donc si f est un élément de F, la fonction $x \mapsto f((x + x_0)$ est un élément de F.

III.7.

III.7.a. Pour tout entier naturel n, $\left|n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right| = n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. $n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

III.7.b. • Supposons $0 < \rho_1 < \rho_2$. Après division des deux membres de l'égalité de l'énoncé par $n^{k_2}\rho_2^n e^{i\theta_2 n}$, on obtient pour tout entier naturel n,

$$\beta + \alpha n^{k_1 - k_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)n}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n = 0.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\beta = 0$. Quand $n = 1$, on obtient $\alpha\rho_1 e^{i\theta_1} = 0$ et donc $\alpha = 0$.

• Supposons que $\rho_1 = \rho_2$. Si par exemple $k_1 < k_2$, alors un raisonnement analogue au raisonnement précédent montre que $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$. Si $k_1 = k_2$, on obtient après simplification

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha e^{i\theta_1 n} + \beta e^{i\theta_2 n} = 0.$$

$n=1$ et $n=2$ fournissent $\left\{\begin{array}{l}\alpha e^{i\theta_1}+\beta e^{i\theta_2}=0\\ \alpha e^{2i\theta_1}+\beta e^{2i\theta_2}=0\end{array}\right.$ (S). Le déterminant de (S) vaut $e^{i(\theta_1+\theta_2)}\left(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}\right)$. Puisque $(\theta_1,\theta_2)\in]0,2\pi]^2$ et que $\theta_1\neq\theta_2$, on a $\det(S)\neq 0$. (S) est donc un système de CRAMER homogène. (S) admet l'unique solution $\alpha=\beta=0$.

III.7.c. Soient f et g deux éléments de F. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=g(n)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(f-g)(n)=0$. Puisque $f-g$ est un élément de F, on en déduit que $f-g=0$ et donc que $f=g$.

III.8. La division euclidienne de X^n par χ_A qui est de degré 3 et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montrent que pour tout entier naturel n, il existe trois nombres complexes a_n, b_n et c_n tels que

$$A^n=a_nA^2+b_nA+c_nI_3.$$

Que χ_A admettent trois racines simples, une racine double et une racine simple ou une racine triple, a_n, b_n et c_n sont solutions d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues à coefficients constants dont le second membre est du type $\begin{pmatrix}f_1(n)\\ f_2(n)\\ f_3(n)\end{pmatrix}$ où f_1, f_2 et f_3 sont trois éléments de F. Les formules de CRAMER montrent alors qu'il existe trois éléments g_1, g_2 et g_3 de F tels que pour tout entier naturel n, $a_n=g_1(n)$, $b_n=g_2(n)$ et $c_n=g_3(n)$. On en déduit que les 9 coefficients de A^n sont du type $\omega_{i,j}(n)$ où les $\omega_{i,j}$ sont des éléments de F.

III.9.

III.9.a. $\gamma(0)=I_3$ et $\gamma(1)=A$.

III.9.b. Soient $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. $\gamma(n+m)=A^{n+m}=A^nA^m=\gamma(n)\gamma(m)$.

III.9.c. g est un élément de F et f est un élément de F d'après III.6.b. Pour tout entier naturel n, $f(n)$ est le coefficient ligne i, colonne j, de $\gamma(n+m)$ et $g(n)$ est le coefficient ligne i, colonne j, de $\gamma(n)\gamma(m)$. D'après la question précédente, ces deux coefficients sont égaux.

f et g sont deux éléments de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n)=g(n)$. D'après la question III.7.c), on en déduit que $f=g$. Mais alors, pour $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, les coefficients ligne i, colonne j, de $\gamma(x+m)$ et $\gamma(x)\gamma(m)$ sont les mêmes. Ceci montre que pour tout entier naturel m et tout réel x, $\gamma(x+m)=\gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. Mais alors les applications $f\ :\ y\mapsto\omega_{i,j}(x+y)$ et $g\ :\ y\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(y)$ sont deux éléments de F vérifiant $\forall m\in\mathbb{N}$, $f(m)=g(m)$. On en déduit que $f=g$ et donc que pour $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\omega_{i,j}(x+y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(y)$.

Ceci montre que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. $\gamma(-1)\times A=\gamma(-1)\times\gamma(1)=\gamma(0)=I_3$. Donc, $\gamma(-1)=A^{-1}$.
Pour $p\in\mathbb{N}$, $\left(\gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)\right)^p=\gamma\left(\dfrac{1}{p}+\dots\dfrac{1}{p}\right)=\gamma(1)=A$.

III.11. Chaque application $\omega_{i,j}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y)$. En dérivant les deux membres de cette égalité à y fixé, on obtient

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \gamma'(x+y)=\gamma'(x)\gamma(y).$$

Quand $y=0$, on obtient en particulier $\forall x\in\mathbb{R}$, $\gamma'(x)=\gamma'(0)\gamma(x)$. De plus, $\gamma(0)=I_3$. La fonction $u\ :\ t\mapsto\exp(t\gamma'(0))$ vérifie $u(0)=\exp(0)=I_3$ et pour tout réel t, $u'(t)=\gamma'(0)u(t)$. Par unicité de la solution au problème de CAUCHY, on en déduit que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \gamma(t)=\exp\left(t\gamma'(0)\right).$$

En particulier, pour $t=1$,

$$A=\exp\left(\gamma'(0)\right).$$

Troisième partie

III.12. En développant suivant la deuxième colonne, on obtient

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 2 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-4X+4) = (X+1)(X-2)^2.$$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3)) = 2$ ou encore si et seulement si $\mathrm{rg}(A-2I_3) = 1$. Or, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et donc $A - 2I_3$ n'est pas de rang 1. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

III.13. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$. On évalue en -1 puis en 2 directement et après avoir dérivé. On obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ a_n - \left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = (-1)^n \\ 4a_n + 2\left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 2^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + \dfrac{n}{2}2^n \\ 5a_n + c_n = \dfrac{n}{2}2^n + (-1)^n \\ -4a_n + c_n = (-n+1)2^n \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{9}\left(\left(\dfrac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right) \\ b_n = -\dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right) + \dfrac{n}{2}2^n \\ c_n = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right) + (-n+1)2^n \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{9}\left(\left(\dfrac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{9}\left(\left(-\dfrac{3n}{2} + 4\right)2^n - 4(-1)^n\right) \\ c_n = \dfrac{1}{9}\left((-3n+5)2^n + 4(-1)^n\right) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = Q(A)\chi_A(A) + a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{9}\left[\left(\left(\frac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right)A^2 + \left(\left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n - 4(-1)^n\right)A + \left((-3n+5)2^n + 4(-1)^n\right)I_3\right].$$

Plus précisément, puisque $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
9A^n &= \left(\left(\frac{3n}{2} - 1\right)2^n + (-1)^n\right)\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n - 4(-1)^n\right)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left((-3n+5)2^n + 4(-1)^n\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{9n}{2} + 9\right)2^n & 0 & \left(\dfrac{9n}{2}\right)2^n \\ \left(\dfrac{9n}{2}\right)2^n & 9(-1)^n & \left(\dfrac{9n}{2} - 9\right)2^n + 9(-1)^n \\ \left(-\dfrac{9n}{2}\right)2^n & 0 & \left(-\dfrac{9n}{2} + 9\right)2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on pose pour tout réel t, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{t}{2}+1\right)2^t & 0 & \left(\frac{t}{2}\right)2^t \\ \left(\frac{t}{2}\right)2^t & e^{i\pi t} & \left(\frac{t}{2}-1\right)2^t + e^{i\pi t} \\ \left(-\frac{t}{2}\right)2^t & 0 & \left(-\frac{t}{2}+1\right)2^t \end{pmatrix}$.

III.13.a. 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible. De plus, d'après la question III.10

$$A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}+1\right)2^{-1} & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)2^{-1} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)2^{-1} & e^{-i\pi} & \left(-\frac{1}{2}-1\right)2^{-1} + e^{-i\pi} \\ \left(\frac{1}{2}\right)2^{-1} & 0 & \left(\frac{1}{2}+1\right)2^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

III.13.b. D'après la question III.10, si $B = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, alors $B^2 = A$ avec

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & i & -\frac{3\sqrt{2}}{4} + i \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

III.13.c. D'après la question III.11, si $M = \gamma'(0)$, alors $\exp(M) = A$ avec

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & \frac{1}{2} - \ln 2 + i\pi \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{pmatrix}.$$

