SESSION 2014

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Notons I l'intégrale à calculer. La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ est continue sur le compact D et donc I existe.

En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{1 + r^2}\, rdrd\theta \\
&= \left(\int_0^1 \frac{r}{r^2 + 1}\, dr\right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \text{ (intégrales indépendantes)} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}\ln(r^2 + 1)\right]_0^1 = \pi \ln 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \pi \ln 2.}$$

EXERCICE II

II.1. Sur I (resp. J), (E) s'écrit encore $y'' + \dfrac{a(x)}{x^2}y' + \dfrac{b(x)}{x^2}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I (resp. J), on sait que S^+ (reps. S^-) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

II.2. Soit $f \in S$. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et en particulier f est continue en 0.

$$\begin{aligned}
f \in \operatorname{Ker}\varphi &\Leftrightarrow f_I = 0 \text{ et } f_J = 0 \Leftrightarrow f_{/\mathbb{R}^*} = 0_{/\mathbb{R}^*} \\
&\Leftrightarrow f = 0 \text{ (pour } \Rightarrow \text{ par continuité de } f \text{ en } 0).
\end{aligned}$$

On a montré que $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ et donc φ est injective. Mais alors, φ induit un isomorphisme de S sur $\varphi(S)$ et donc

$$\dim(S) = \dim(\varphi(S)) \leqslant \dim(S^+ \times S^-) = \dim(S^+) + \dim(S^-) = 2 + 2 = 4.$$

$$\boxed{\dim(S) \leqslant 4.}$$

(On a implicitement admis entre autre que toute solution sur I (reps. J) est automatiquement de classe C^2 sur I (reps. J).

II.3. Soit f une fonction de classe C^2 sur I (resp. J).

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E) sur I (resp. J)} &\Leftrightarrow \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ x^2 f''(x) + xf'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ x(f')'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ (xf')'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ xf'(x) = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ f'(x) = \frac{\lambda}{x} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in I \text{ (resp. J)},\ f(x) = \lambda \ln(|x|) + \mu.
\end{aligned}$$

Soit alors f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 \ln(|x|) + \mu_1 \text{ si } x > 0 \\ \lambda_2 \ln(|x|) + \mu_2 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

f doit avoir une limite réelle en 0. Ceci impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\mu_1 = \mu_2$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}^*$ puis sur $\mathbb{R}$ par continuité de f en 0. Réciproquement, les fonctions constantes sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

S est donc l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ ou encore l'espace vectoriel engendré par la fonction $x \mapsto 1$. On en déduit que

$$\boxed{\dim(S) = 1.}$$

II.4. Soient α un réel puis $f\alpha$ la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Pour tout réel $x \in I$,

$$\begin{aligned} x^2 f''_\alpha(x) - 6x f'_\alpha(x) + 12 f_\alpha(x) &= x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha \\ &= (\alpha(\alpha-1) - 6\alpha + 12)\, x^\alpha = \left(\alpha^2 - 7\alpha + 12\right) x^\alpha = (\alpha-3)(\alpha-4)x^\alpha. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (\alpha-3)(\alpha-4)x^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha-3)(\alpha-4) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ ou } \alpha = 4. \end{aligned}$$

Ainsi, les deux fonctions $f_3 : x \mapsto x^3$ et $f_4 : x \mapsto x^4$ sont solutions de (E) sur I. De plus, la famille (f_3, f_4) est libre car le wronskien de (f_3, f_4) est

$$W(f_3, f_4) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6,$$

et ne s'annule pas sur I. Puisque S^+ est de dimension 2, on en déduit que

$$\boxed{S^+ = \left\{x \mapsto \lambda x^3 + \mu x^4,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ constituent aussi un système fondamental de solutions de (E) sur J, les calculs algébriques pour le vérifier étant les mêmes que sur I. Puisque S^- est de dimension 2, $S^- = \left\{x \mapsto \lambda x^3 + \mu x^4,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Soit f un élément de (S). Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \mu_1 x^4 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda_2 x^3 + \mu_2 x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \mu_1 x^4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^3 + \mu_2 x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases},$$

(la valeur en 0 ayant été fournie par l'équation (E)). Réciproquement, une telle fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et si elle est deux fois dérivable en 0, est encore solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Donc, une telle fonction est effectivement dans S si et seulement si elle est deux fois dérivables en 0, à dérivée seconde continue en 0.

Déjà, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$, f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ (c'est-à-dire en particulier deux fois dérivables à droite en 0 et à dérivée seconde continue à droite en 0) et sur $]-\infty, 0[$.

f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La fonction f' est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f'(x) = \begin{cases} 3\lambda_1 x^2 + 4\mu_1 x^3 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 3\lambda_2 x^2 + 4\mu_2 x^3 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. Puisque f' est continue à gauche en 0 (car $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x<0} f'(x) = 0 = f'(0)$), f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De nouveau, f' admet en 0 un développement limité d'ordre 1 à savoir $f'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc, f' est dérivable en 0 ou encore f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = 0$. La fonction f" est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f''(x) = \begin{cases} 6\lambda_1 x + 12\mu_1 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 6\lambda_2 x + 12\mu_2 x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. De nouveau, f'' est continue à gauche en 0 et donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

S est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x^3 + \mu_1 x^4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^3 + \mu_2 x^4 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$, $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$. S est de dimension 4. Une base de S est la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) où $g_1 \;:\; x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^3 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$, $g_2 \;:\; x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$, $g_3 \;:\; x \mapsto \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^3 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$ et $g_4 \;:\; x \mapsto \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^4 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. En effet, la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) est génératrice de S. De plus, si $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0$, alors $\lambda_2 = 0$ (en faisant tendre x vers $+\infty$), $\lambda_4 = 0$ (en faisant tendre x vers $-\infty$) puis $\lambda_1 = 0$ (obtenu pour $x = 1$) puis $\lambda_3 = 0$ (obtenu pour $x = -1$). La famille (g_1, g_2, g_3, g_4) est donc libre et génératrice de S.

II.5. On adapte la question précédente en souhaitant que les solutions soient $\alpha = -3$ et $\alpha = -4$.
L'équation $(E) \;:\; x^2 y'' + 8xy' + 12y = 0$ fournit l'équation d'inconnue α : $\alpha(\alpha - 1) + 8\alpha + 12 = 0$ ou encore $\alpha^2 + 7\alpha + 12 = 0$ ou enfin $(\alpha + 3)(\alpha + 4) = 0$.

S^+ (reps. S^-) est constitué des fonctions de la forme $f \;:\; x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^3} + \dfrac{\mu}{x^4} = \dfrac{\lambda x + \mu}{x^4}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si une telle fonction a une limite réelle en 0 alors $\lambda = \mu = 0$. Donc, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ses restrictions à $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont nécessairement nulles puis f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, si (E) est l'équation $x^2 y'' + 8xy' + 12y = 0$, alors $\dim(S) = 0$.

Problème

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n. \end{aligned}$$

III.2.

III.2.a. On sait que que la série de terme général $a_k - a_{k+1}$, $k \geqslant 0$, est de même nature que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (série télescopique). Puisque la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente, il en est de même de la série de terme général $a_k - a_{k+1}$, $k \geqslant 0$.

III.2.b. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Soit M un majorant de la suite $(|B_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = M(a_0 - a_n) \leqslant M a_0.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k|\right)$ est majorée. Puisque la série correspondante est à termes positifs, on en déduit que ma série de terme général $|(a_k - a_{k+1}) B_k|$ ou encore la série de terme général $(a_k - a_{k+1}) B_k$ converge absolument et donc converge.

D'autre part, la suite (a_n) tend vers 0 et la suite (B_n) est bornée. Donc la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. Mais alors, d'après la question III.1, la suite (S_n) converge en tant que somme de deux suites convergentes ou encore la série de terme général $a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

III.2.c. **Critère spécial aux séries alternées.** Soit (a_n) une suite réelle positive, décroissante et de limite nulle. Alors la série de terme général $(-1)^n a_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

D'après ce qui précède, pour démontrer ce résultat, il suffit de montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \in \{0,1\}$ et en particulier, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \leqslant 1$. Le critère spécial aux séries alternées est donc démontré.

III.3.

III.3.a. Soit n un entier naturel non nul. Puisque $e^{i\theta} \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$ puis

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{1-e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\theta}\times e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\frac{e^{in\theta/2}-e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}$$
$$= \frac{\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}e^{i(n+1)\theta/2}.$$

III.3.b. Soit α un réel.

1er cas. Si $\alpha \leqslant 0$, puisque $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est grossièrement divergente.

2ème cas. Si $\alpha > 1$, puisque $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

3ème cas. Supposons $0 < \alpha \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = e^{in\theta}$. La suite (a_n) est réelle, décroissante et de limite nulle (car $\alpha > 0$). D'autre part, d'après la question précédente, pour tout entier naturel non nul,

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}e^{i(n+1)\theta/2}\right| = \frac{\left|\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

Donc, la suite (B_n) est bornée. D'après la règle d'ABEL démontrée dans les questions précédentes, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Notons que la série de terme général $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc que la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est semi-convergente.

En résumé, si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente, si $0 < \alpha \leqslant 1$, la série est semi-convergente et si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

III.4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$ et donc la série numérique de terme général $\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge.
- Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, puisque pour tout entier naturel non nul, $\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{in\theta}}{n^{1/2}}\right)$, la série de terme général $\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge d'après la question précédente.

On a montré que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

III.5.

III.5.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout z de A, $|a_n F_n(z)| = a_n |F_n(z)| \leqslant M a_n$ puis $\sup\{|a_n F_n(z)|,\ z \in A\} \leqslant M a_n$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} M a_n = 0$, on a encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\{|a_n F_n(z)|,\ z \in A\} = 0$. Ceci montre que la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout z de A, $|(a_{k+1} - a_k)F_k(z)| = (a_k - a_{k+1}) |F_k(z)| \leqslant (a_k - a_{k+1})$ puis $\sup\{|(a_{k+1} - a_k)F_k(z)|,\ z \in A\} \leqslant M(a_k - a_{k+1})$. D'après la question III.2.a, la série numérique de terme général $M(a_k - a_{k+1})$ converge et on a donc montré que la série de fonctions de terme général $(a_{k+1} - a_k)F_k$, $k \in \mathbb{N}$, converge normalement sur A.

III.5.b. Pout out entier naturel non nul n, d'après la question III.1,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)F_k + a_n F_n.$$

La série de fonctions de terme général $(a_{k+1} - a_k)F_k$, $k \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur A ou encore la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)F_k\right)$ converge uniformément sur A. D'autre part, la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A. Mais alors la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k\right)$ converge uniformément sur A ou encore la série de fonctions de terme général $a_n f_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur A.

III.6.

III.6.a. Soit x un réel. $1 - e^{ix} = e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right) = -2i \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) e^{ix/2}$.

Soit $a \in]0, \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, 2\pi - a]$, posons $f_n(x) = \sin(nx)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, 2\pi - a]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|} \text{ (d'après III.3.b)} \\
&= \frac{1}{\sin(x/2)} \text{ (car } \frac{x}{2} \in \left[\frac{a}{2}, \pi - \frac{a}{2}\right] \subset]0, \pi[) \\
&\leqslant \frac{1}{\sin(a/2)}.
\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)$ est uniformément bornée sur $[a, 2\pi - a]$. Puisque la suite (a_n) tend vers 0 en décroissant, la question III.5.b permet d'affirmer que la série de fonctions de terme général $u_n = a_n f_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers U sur $[a, 2\pi - a]$.

Puisque chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[a, 2\pi - a]$ et que la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers U sur $[a, 2\pi - a]$, la fonction U est continue sur $[a, 2\pi - a]$. Ceci étant vrai pour tout réel $a \in]0, \pi[$, la fonction U est continue sur $]0, \pi[$.

III.6.b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De nouveau, on doit démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px) = \sin(px)\ \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right).$$

• Soit $x \in]0, \pi]$. D'après la question III.3.b,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right| &= |\sin(px)| \times \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \\ &\leqslant \frac{|\sin(px)|}{\sin(x/2)} \\ &\leqslant \frac{|\sin(px)|}{x/\pi} \text{ (d'après le résultat admis par l'énoncé)} \\ &\leqslant \frac{|px|}{x/\pi} \text{ (classiquement, pour tout réel } t,\ |\sin(t)| \leqslant |t|) \\ &= p\pi.\end{aligned}$$

• Si $x = 0$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right| = 0 \leqslant p\pi$.

En résumé, pour tout x de $[0, \pi]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right| \leqslant p\pi$. Une nouvelle fois, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)\right)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$ et donc la série de fonctions de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0, \pi]$.

III.6.c. **i.** La fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. La fonction est impaire. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p(U) = 0$ puis pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}b_p(U) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} U(x)\sin(px)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)\ dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} v_n(x)\ dx \text{ (car } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge uniformément sur le segment } [0, \pi]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \frac{2}{\pi\sqrt{p}} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}}.\end{aligned}$$

On en déduit que la série de FOURIER de U est $\sum_{p=1}^{+\infty} u_p$.

ii. Toujours sous l'hypothèse « U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ », la formule de PARSEVAL s'écrit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^2(x)\ dx = \frac{a_0^2(U)}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p^2(U) + b_p^2(U)) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p}.$$

Ceci est absurde car la série de terme général $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} = +\infty$. La fonction U n'est donc pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

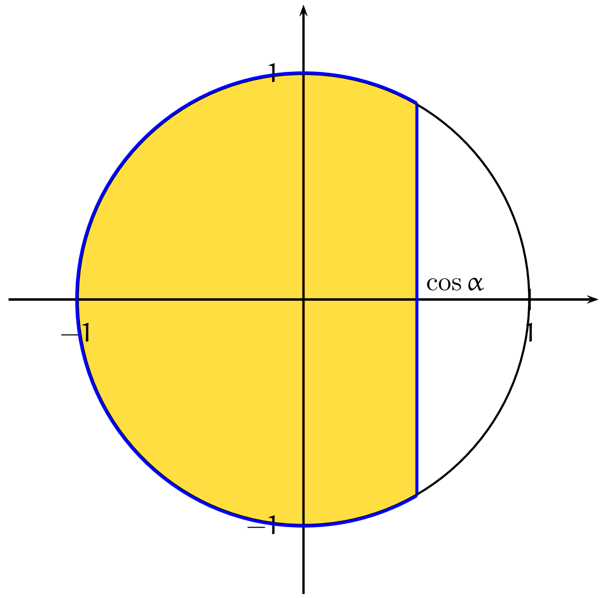
Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

III.7. La série entière de terme général $z \mapsto a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur tout disque fermé $D(0, r)$ contenu dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

III.8.

III.8.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \ell_n$. Si la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général ℓ_n converge, ce qui n'est pas. Donc, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

III.8.b.



III.8.c. La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que forme quadratique et la fonction $\psi : (x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que forme linéaire.

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 + y^2 \leqslant 1\} = \varphi^{-1}\left(]-\infty, 1]\right)$. $]-\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]1, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x \leqslant \cos\alpha\} = \psi^{-1}\left(]-\infty, \cos\alpha]\right)$. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x \leqslant \cos\alpha\}$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Mais alors D_α est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$. Comme d'autre part, D_α est borné car contenu dans le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, D_α est un compact de $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

III.8.d. Soient $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $|1 - z| \geqslant \mathrm{Re}(1 - z) = 1 - \mathrm{Re}(z) = 1 - x \geqslant 1 - \cos\alpha > 0$ et donc

$$|F_n(z)| = \frac{|1 - z^n|}{|1 - z|} \leqslant \frac{1 + |z|^n}{\mathrm{Re}(1 - z)} \leqslant \frac{2}{1 - x} \leqslant \frac{2}{1 - \cos\alpha}.$$

III.8.e. Ainsi, la suite de fonctions (F_n) est uniformément bornée sur D_α. Comme d'autre part, la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle, la question III.5.b permet d'affirmer que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α.

