SESSION 2013

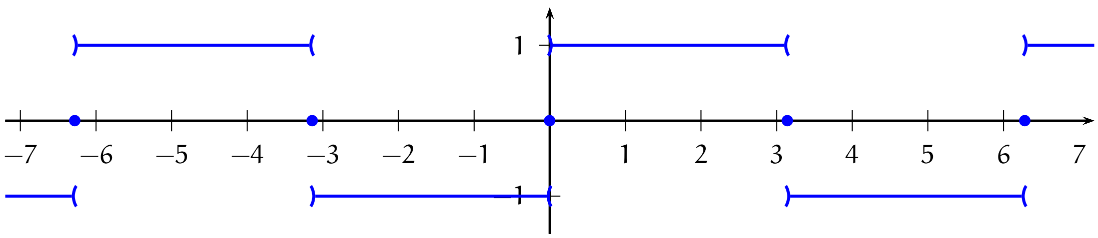
CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1 : une série de Fourier

1. Représentation graphique de f



La fonction f est continue par morceaux et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. Puisque la fonction f est impaire, pour tout entier naturel n, $a_n(f) = 0$ puis pour tout entier naturel non nul n,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

La série de Fourier de f est $x \mapsto \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1-(-1)^n)\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

2. (a) La suite $\left(\dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées.

La fonction f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et vérifie en tout réel x l'égalité $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

(b) $\dfrac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4k^2} > 0$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{4k^2}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

La fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de PARSEVAL permet d'affirmer que

$$\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

Cette égalité fournit

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx = 2,$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

EXERCICE 2 : un système différentiel

1. $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}A)\,X + \det A = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $\chi_A(A) = 0$ ou encore $(A - 2I_2)^2 = 0$. Ainsi, $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $(A-2I_2)^2 = 0$. La matrice $A - 2I_2$ est nilpotente d'indice 2.

Soit t un réel. Puisque les matrices $2tI_2$ et $tA - 2tI_2$ commutent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{t(A-2I_2)+2tI_2} = e^{2tI_2}\times e^{t(A-2I_2)} = e^{2t}I_2\times e^{t(A-2I_2)} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}\\
&e^{2t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(A-2I_2)^n = e^{2t}\left(I_2 + t(A-2I_2)\right)\\
&= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & (1+t)e^{2t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système proposé s'écrit $X' = AX$. On sait que les solutions de ce système sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^tAX_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne quelconque indépendant de t.

Les conditions $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ s'écrivent encore $e^{0A}X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La solution du problème posé est la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & (1+t)e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3t)e^{2t} \\ (2+3t)e^{2t}\end{pmatrix}$.

PROBLÈME : séries de TAYLOR et développement en série entière

Partie préliminaire

1. On sait que pour tout réel x de $]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}\quad (*).$$

On sait de plus que la série entière $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

En dérivant les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

2. Soit $x \in]0,+\infty[$.
Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\ dt = \left[t^x(-e^{-t})\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A x t^{x-1}(-e^{-t})\ dt = -\varepsilon^x e^{-\varepsilon} + A^x e^{-A} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\ dt.$$

Quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers 0 car $x > 0$ et quand A tend vers $+\infty$, $A^x e^{-A}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\ dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ ou encore $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = (1-1)!$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Alors

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n! = ((n-1)+1)!.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : pour tout réelx de I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Soit $x \in I$.

- Tout d'abord, $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\ dt = \int_a^x f'(t)\ dt$. La fonction f est de classe C^1 sur I et les réels a et x appartiennent à I. Donc $\displaystyle\int_a^x f'(t)\ dt$ existe. De plus,

$$\int_a^x f'(t)\ dt = f(x) - f(a),$$

et donc $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\ dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\ dt$. La formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.\quad (*)$.

Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,x]$ ou $[x,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \\
&= 0 + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \text{ (car } n+1 > 0) \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt.
\end{aligned}$$

En reportant dans $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Partie I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. Pour tout réel x non nul,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

et d'autre part, $f(0) = 1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n+1)!}$. Finalement, pour tout réel x, $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$. Ainsi, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. D'après la question 1), pour tout réel x de $]-1,1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ puis $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

Ainsi, la fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et en particulier est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ qui est un voisinage de 0. De plus, par unicité des coefficients d'un développement en série entière, pour tout entier naturel n, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ ou encore $f^{(n)}(0) = n \times n!$.

La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ convient.

6. **(a)** La fonction f est développable en série entière sur $]-R,R[$ et en particulier est continue sur le segment $[0,1]$ (car $R > 1$). On en déduit que la fonction f est bornée sur ce segment. Notons M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(x) = f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a

$$|g_n(x)| = |f(x)| \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} x^n \leqslant M \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!},$$

et donc

$$\sup\{|g_n(x)|,\ x \in [0,1]\} \leqslant M \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}. \quad (*)$$

On sait que la série de fonction de terme général $x \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument sur $]-R,R[$. En particulier, puisque $1 \in]-R,R[$, la série numérique de terme général $\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente et il en est de même de la série numérique de terme général $M\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité $(*)$ montre alors que la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[0,1]$.

(b) Pour tout réel x de $[0,1]$,

$$(f(x))^2 = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x).$$

Puisque la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,1]$ et que chaque fonction g_n est continue sur le segment $[0,1]$, un théorème d'intégration terme à terme sur un segment permet d'écrire

$$\int_0^1 (f(x))^2\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0.$$

La fonction f^2 est donc une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. On en déduit que la fonction f^2 est nulle sur $[0,1]$ puis que la fonction f est nulle sur $[0,1]$.

(c) Mais alors, les dérivées successives en 0 de la fonction f sont nulles et donc, pour tout réel x de $]-R,R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

On a montré que la fonction f est nulle sur $]-R,R[$.

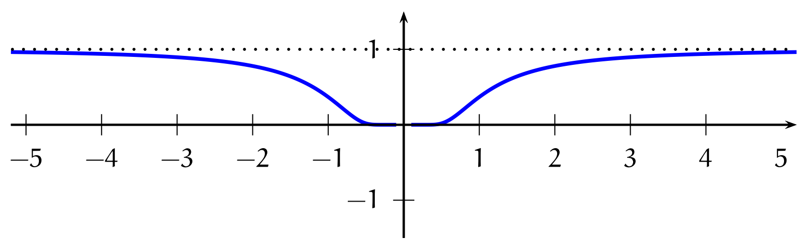
Partie II. Contre-exemples

7. Pour tout réel x de $I =]-\infty,1[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{-x}$. La fonction f est de classe C^∞ sur I en tant que fraction rationnelle définie sur I.

On sait que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que pour tout réel x de $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On sait aussi que la série de Taylor de f diverge en tout x de $]-\infty,-1]$.

La fonction f est donc un exemple de fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\infty,1[$, développable en série entière au voisinage de l'origine, mais ne coïncidant pas avec sa série de Taylor sur I tout entier.

8. (a)



(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

• Pour tout réel $x > 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{P_0(x)}{x^{3\times 0}}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec $P_0 = 1$. Puisque P_0 est un polynôme, la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3n\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\times\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

où $P_{n+1} = X^3P_n' - (3nX^2 - 2)P_n$ est un polynôme.

La propriété est démontrée par récurrence.

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0 = f(0)$. On en déduit que la fonction f est continue en 0. Puisque f est d'autre part continue sur $]0,+\infty[$, f est de classe C^0 sur $[0,+\infty[$ et $f^{(0)}(0) = 0$. La propriété à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f soit de classe C^n sur $[0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(0) = 0$. D'après la question précédente, f est de classe $C^{(n+1)}$ sur $]0,+\infty[$ et il existe un polynôme P_{n+1} tel que, pour tout réel $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Ensuite, en posant $X = \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} P_{n+1}\left(1/\sqrt{X}\right)X^{(3n+3)/2}e^{-X}$. Quand X tend vers $+\infty$, l'expression $P_{n+1}\left(1/\sqrt{X}\right)X^{(3n+3)/2}e^{-X}$ est équivalente à une expression du type $\lambda X^{\alpha}e^{-X}$ qui tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n+1)}(x) = 0$.

En résumé,

- la fonction $f^{(n)}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$,
- la fonction $f^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$,
- la fonction $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$ a une limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

D'après un théorème classique d'analyse, la fonction $f^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ ou encore la fonction f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. En particulier, $f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n+1)}(x) = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence.

(d) Si il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, alors pour tout $x \in]-r,r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0.$$

La fonction ne s'annulant qu'en 0, cette dernière égalité est fausse et donc la fonction f est un exemple de fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et non développable en série entière sur un voisinage de 0.

9. **(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ (car $\forall(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ 1+tx^2 \geqslant 1 > 0$). La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est donc intégrable sur tout segment contenu dans $[0,+\infty[$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} \leqslant e^{-t}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty[$ et finalement sur $[0,+\infty[$.

Soit $A > 0$. Considérons la fonction $\begin{array}{cccc}\Phi : & [-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}\end{array}$ de sorte que pour tout x de $[-A,A]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,t)\,dt$.

• Pour tout réel x de $[-A,A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie sur $[-A,A]\times[0,+\infty[$ par

$$\forall(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = \frac{-2txe^{-t}}{\left(1+tx^2\right)^2}.$$

- Pour tout réel x de $[-A,A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout réel t de $[0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[-A,A]$.
- Pour tout $(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2txe^{-t}}{\left(1+tx^2\right)^2} \leqslant 2Ate^{-t} = \varphi_1(t)$. De plus, la fonction φ_1 est continue

par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction f est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe intégrale. Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, on a montré que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2txe^{-t}}{(1+tx^2)^2}\ dt.$$

(b) Soit $t \in]0, +\infty[$. Soit $x \in \left]-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right[$. Alors, $|xt| < 1$ puis

$$\frac{e^{-t}}{1+tx^2} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(tx^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n e^{-t} x^{2n}.$$

La fonction $g\ :\ x \mapsto \Phi(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est donc développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right[$. Cette fonction est alors de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right[$ et en particulier n fois dérivable en 0. De plus, pour tout entier naturel n, $g^{(2n+1)}(0) = 0$ et

$$\frac{\partial^{2n}\Phi}{(\partial x)^{2n}}(0,t) = g^{(2n)}(0) = (2n)!(-1)^n t^n e^{-t}.$$

Ces égalités reste clairement vraies pour $t = 0$.

D'après l'énoncé, pour tout x réel et tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n\Phi}{(\partial x)^n}(x,t)\ dt$. En particulier, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n\Phi}{(\partial x)^n}(0,t)\ dt$. Par suite, pour tout entier naturel n, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ puis pour tout entier naturel

$$f^{(2n)}(0) = \int_0^{+\infty}(2n)!(-1)^n t^n e^{-t}\ dt = (-1)^n(2n)!\Gamma(n+1) = (-1)^n(2n)!n!$$

.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Alors, pour tout entier naturel n, $u_{2n+1} = 0$ et $u_{2n} = \frac{(-1)^n(2n)!n!}{(2n)!} = (-1)^n n!$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La suite $((-1)^n n! x^n)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la série de terme général $u_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge. Ainsi, la série de Taylor ne converge en aucun réel non nul ou encore, le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nul. Donc la fonction f n'est pas développable en série entière à l'origine.

Partie III. Condition suffisante

10. **(a)** Soit $x \in]-a, a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Ensuite,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt\right| \leqslant \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\ dt \text{ si } x \in [0, a[\\ \displaystyle\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\ dt \text{ si } x \in]-a, 0[\end{array}\right.$$

$$\leqslant \left\{\begin{array}{l}\displaystyle M\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ dt \text{ si } x \in [0, a[\\ \displaystyle M\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\ dt \text{ si } x \in]-a, 0[\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\displaystyle M\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \text{ si } x \in [0, a[\\ \displaystyle M\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0 \text{ si } x \in]-a, 0[\end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\displaystyle M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ si } x \in [0, a[\\ \displaystyle M\frac{(-x)^n}{n!} \text{ si } x \in]-a, 0[\end{array}\right. = M\frac{|x|^n}{n!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} M\dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) = 0$. On a montré que pour tout x de $]-a, a[$, la série de Taylor de f en x converge et que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. La fonction f est donc développable en série entière sur $]-a, a[$.

(b) La fonction sinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont bornées sur $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

