SESSION 2012

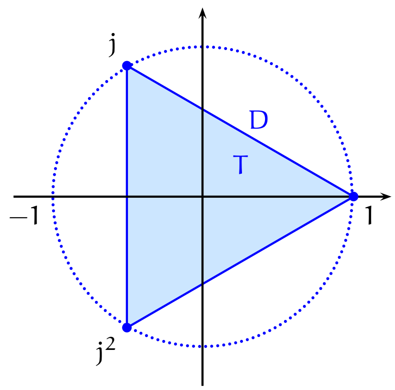
CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1



• Les points P et Q ont pour coordonnées respectives $(1,0)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Une équation de la droite (PQ) est donc

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)(x-1) + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)(y-0) = 0,$$

ou encore $\sqrt{3}(x-1) + 3y = 0$ ou enfin $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$. Puisque $0 + \sqrt{3} \times 0 - 1 < 0$, le demi-plan ouvert de frontière (PQ) contenant O est défini par : $x + \sqrt{3}y - 1 < 0$.

• On obtient une équation de la droite (PR) en remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$: $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ puis le demi-plan ouvert de frontière (PR) contenant O est défini par : $x - \sqrt{3}y - 1 < 0$.

• Puisque $x_Q = x_R = -\frac{1}{2}$, une équation de la droite (QR) est $2x + 1 = 0$. Puisque $2 \times 0 + 1 > 0$, le demi-plan de frontière (QR) contenant le point O est défini par : $2x + 1 > 0$.

En résumé, T est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $2x + 1 > 0$ et $x - \sqrt{3}y - 1 < 0$ et $x + \sqrt{3}y - 1 < 0$.

I.2

I.2.1 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $AU = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $AU = U$ et puisque $U \neq 0$, 1 est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé.

I.2.2 $\mathrm{Tr}(A) = 1 + \lambda + \overline{\lambda} = 1 + 2a$ puis

$$\mathrm{Tr}(A^2) = 1^2 + \lambda^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 + (a+ib)^2 + (a-ib)^2 = 1 + 2(a^2 - b^2).$$

I.2.3 $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} > 0$ puis

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A^2) &= a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}^2 + a_{2,3}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} + a_{3,3}^2 \\ &> a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2.\end{aligned}$$

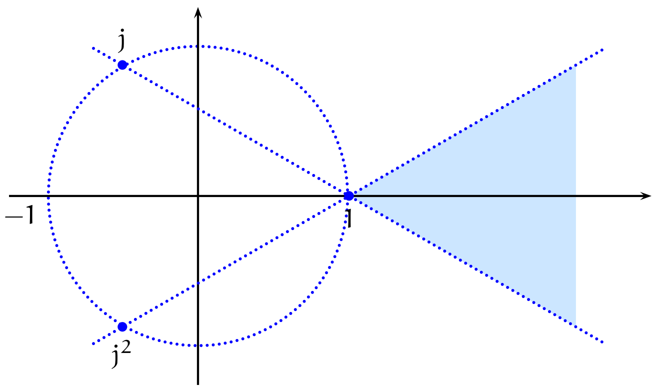
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ et $v = (1,1,1)$ fournit

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 = (1\times a_{1,1} + 1\times a_{2,2} + 1\times a_{3,3})^2 \leqslant \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2\right) < 3\mathrm{Tr}(A^2).$$

I.2.4 L'inégalité $\mathrm{Tr}(A) > 0$ fournit $1 + 2a > 0$. d'autre part,

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 < 3\mathrm{Tr}(A^2) \Leftrightarrow (1+2a)^2 < 3(1+2(a^2-b^2)) \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 2 - 6b^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 - 3b^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2 - \left(\sqrt{3}b\right)^2 \Leftrightarrow \left(a - \sqrt{3}b - 1\right)\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) > 0.$$

I.2.5 $\left(a - \sqrt{3}b - 1\right)\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) > 0$ équivaut à $(\left(a - \sqrt{3}b - 1\right) > 0$ et $\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) > 0)$ ou $(\left(a - \sqrt{3}b - 1\right) < 0$ et $\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) < 0)$. La zone définie par $(\left(a - \sqrt{3}b - 1\right) > 0$ et $\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) > 0)$ est représentée ci-dessous



Cette zone est en dehors du disque de centre O et de rayon 1 et donc λ n'appartient pas à cette zone. Finalement, λ appartient à la zone définie par $2a + 1 > 0$ et $\left(a - \sqrt{3}b - 1\right) < 0$ et $\left(a + \sqrt{3}b - 1\right) < 0$ ou encore λ appartient à T.

I.3

I.3.1 • $\dfrac{1}{3}(1 + \lambda + \overline{\lambda}) = \dfrac{1}{3}\left(1 + r\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right) = \dfrac{1}{3}(1 + 2r\cos(\theta))$.

• $\dfrac{1}{3}(1 + j\lambda + j^2\overline{\lambda}) = \dfrac{1}{3}\left(1 + r\left(e^{i\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 + 2r\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

• $\dfrac{1}{3}(1 + j^2\lambda + j\overline{\lambda}) = \dfrac{1}{3}\left(1 + r\left(e^{i\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)}\right)\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 + 2r\cos\left(\theta + \dfrac{4\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{3}\left(1 - 2r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

I.3.2 La condition $2a + 1 > 0$ s'écrit encore $1 + 2r\cos(\theta) > 0$ et fournit $\alpha > 0$. Donc $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ et $a_{3,3}$ sont strictement positifs.

Ensuite, $a - \sqrt{3}b - 1 < 0 \Leftrightarrow -r\cos(\theta) + \sqrt{3}r\sin(\theta) + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 - 2r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right\rangle 0 \Leftrightarrow \gamma > 0$. Donc $a_{2,1}$, $a_{3,2}$ et $a_{1,3}$ sont strictement positifs.

Enfin, $a + \sqrt{3}b - 1 < 0 \Leftrightarrow -r\cos(\theta) - \sqrt{3}r\sin(\theta) + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 + 2r\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \beta > 0$. Donc $a_{3,1}$, $a_{1,2}$ et $a_{2,3}$ sont strictement positifs.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} &= \alpha + \beta + \gamma \\ &= 1 + \frac{1 + j + j^2}{3}\lambda + \frac{1 + j^2 + j}{3}\overline{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

Finalement, la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

I.3.3 $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$. Le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de Jet à racines simples. Donc J est diagonalisable.

Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines du polynôme annulateur $X^3 - 1$ à savoir 1, j et j^2. De plus, A étant réelle, j et $j^2 = \overline{j}$ ont même ordre de multiplicité ce qui ne laisse que deux possibilités : ou bien 1 est valeur propre triple, ou bien 1, j et j^2 sont trois valeurs propres simples. Si 1 est valeur propre triple, A est semblable à la matrice I_3 et donc A est égale à I_3 ce qui n'est pas. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(J) = (1, j, j^2).}$$

I.3.4 $A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2$ et donc le polynôme $\mathcal{P}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $\mathcal{P}(J) = A$. Puisque $\mathrm{Sp}(J) = (1, j, j^2)$, on sait que $\mathrm{Sp}(A) = \big(\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(j), \mathcal{P}(j^2)\big)$. De plus, $\mathcal{P}(1) = \alpha + \beta + \gamma = 1$ puis

$$\mathcal{P}(j) = \alpha + \beta j + \gamma j^2 = \frac{1}{3}((1 + j + j^2) + \lambda(1 + j^2 + j) + \overline{\lambda}(1 + 1 + 1)) = \overline{\lambda},$$

puis en conjuguant, $\mathcal{P}(j^2) = \overline{\mathcal{P}(j)} = \lambda$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \big(1, \lambda, \overline{\lambda}\big).}$$

Partie II

II.1 Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème composante de AU est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Donc $AU = U$ et puisque $U \neq 0$, 1 est valur propre de A et U est un vecteur propre associé.

II.2 Précision sur $\mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

II.2.1 $BX = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}x_j = 0 \Rightarrow b_{k,k}x_k = -\sum_{j\neq k} b_{k,j}x_j$. Mais alors,

$$|b_{k,k}|\,|x_k| = \left|\sum_{j\neq k} b_{k,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq k} |b_{k,j}|\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq k} |b_{k,j}|\right)|x_k|.$$

Enfin, $X \neq 0$ et donc $|x_k| > 0$. Après simplification par $|x_k|$, on obtient $|b_{k,k}| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq k} |b_{k,j}|$.

II.2.2 Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ puis $B = A - \lambda I_n$. Alors, $\det(B) = \det(A - \lambda I_n) = 0$ et d'après la question précédente, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{k,k} - \lambda| = |b_{k,k}| \leqslant \sum_{j\neq k} |b_{k,j}| = \sum_{j\neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}.$$

On en déduit que $1 - a_{k,k} \geqslant |\lambda - a_{k,k}| \geqslant |\lambda| - |a_{k,k}| = |\lambda| - a_{k,k}$ puis que $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}/\ |\lambda| \leqslant 1\}.}$$

II.2.3 D'après la question précédente, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\left|a_{k,k} - e^{i\theta}\right| \leqslant 1 - a_{k,k}$. Or,

$$\begin{aligned}\left|a_{k,k} - e^{i\theta}\right| \leqslant 1 - a_{k,k} &\Leftrightarrow \left|a_{k,k} - e^{i\theta}\right|^2 \leqslant (1 - a_{k,k})^2 \Leftrightarrow a_{k,k}^2 - 2\cos(\theta)a_{k,k} + 1 \leqslant a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} + 1\\ &\Leftrightarrow 2\cos(\theta)a_{k,k} \geqslant 2a_{k,k} \Leftrightarrow \cos(\theta) \geqslant 1 \text{ (car } a_{k,k} > 0)\\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = 1.\end{aligned}$$

On en déduit que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ puis que $\lambda = 1$.

II.3 Dimension de $E_1(A)$

II.3.1 On sait que A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique. En particulier, $1 \in \mathrm{Sp}({}^tA)$. De plus,

$$\dim(E_1({}^tA)) = n - \mathrm{rg}({}^tA - I_n) = \mathrm{rg}({}^t(A - I_n)) = \mathrm{rg}(A - I_n) = \dim(E_1(A)).$$

II.3.2 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque ${}^tAV = V$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}v_j = v_i$ puis $|v_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\,|v_j|$. En additionnant, ces inégalités membre à membre, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\,|v_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\right)|v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j|.$$

Cette dernière inégalité est une égalité. Ceci impose à chacune des inégalités écrites d'être une égalité et on a donc montré que

$$\forall i[\![1, n]\!],\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\,|v_j|.$$

Ceci montre que ${}^tA|V| = |V|$ et donc $|V|$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (car $|V| \neq 0$) associé à la valeur propre 1. De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'égalité $|v_i| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\,|v_j|$ montre que $|v_i|$ est égale à une somme de réels positifs, l'un au moins de ces réels étant strictement positif (car $V \neq 0$) et donc que $|v_i| > 0$.

$$\forall i[\![1, n]\!],\ |v_i| > 0.$$

II.3.3 Soient $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux vecteurs propres de ${}^tA$ associés à la valeur propre 1. D'après la question précédente, aucune des composantes de X ou de Y n'est nulle.
D'autre part, le vecteur $X - \dfrac{x_1}{y_1}Y$ est dans $E_1({}^tA)$ car $E_1({}^tA)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et la première composante de $X - \dfrac{x_1}{y_1}Y$ est nulle. Ce vecteur est nécessairement nul. On en déduit que $X = \dfrac{x_1}{y_1}Y$.
Ainsi, si V est un vecteur non nul donné de $E_1({}^tA)$, tout vecteur de $E_1({}^tA)$ est colinéaire à V ou encore $E_1({}^tA) = \text{Vect}(V)$. $E_1({}^tA)$ est donc de dimension 1.
D'après la question II.3.2, le vecteur $|V|$ est aussi un vecteur non nul de $E_1({}^tA)$ dont toutes les composantes sont des réels strictement positifs. Soit $\Omega = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v_i|}V$.
$\Omega = (\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un vecteur non nul de $E_1({}^tA)$ et donc engendre la droite $E_1({}^tA)$. De plus, toutes les composantes de Ω sont des réels strictement positifs et la somme de ses composantes est égale à 1.
Enfin, si $\Omega' = (\omega'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un vecteur de $E_1({}^tA)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega' = \lambda\Omega$ puis

$$\sum_{i=1}^{n} \omega'_i = 1 \Rightarrow \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \Omega' = \Omega.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de Ω. L'égalité ${}^tA\Omega = \Omega$ fournit : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

II.3.4 Bilan des propriétés spectrales de A et ${}^tA$

On a ainsi montré que 1 est valeur propre de A (et ${}^tA$), les sous-espaces propres $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ sont des droites vectorielles, $E_1({}^tA)$ est engendré par un vecteur Ω dont toutes les composantes sont des réels strictement positifs de somme égale à 1 et enfin, toute autre valeur propre de A a un module strictement plus petit que 1.

II.4 • N est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$.
• Pour tout $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $N(X) \geqslant 0$.
• Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
N(X) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i|x_i| = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \omega_i|x_i| = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \omega_i|x_i| \geqslant 0)\\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \omega_i \neq 0)\\
&\Rightarrow X = 0
\end{aligned}$$

• Soient $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$N(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i|\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \omega_i|x_i| = |\lambda| N(X).$$

• Soient $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$N(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i|x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i|x_i| + \sum_{i=1}^{n} \omega_i|y_i| = N(X) + N(Y).$$

On a montré que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\mathsf{N}(AX) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right)|x_j|\\ \sum_{j=1}^{n} \omega_j|x_j| \text{ (d'après la question II.3.3)}\\ = \mathsf{N}(X).\end{aligned}$$

Soit alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = \lambda X$ puis

$$|\lambda|\mathsf{N}(X) = \mathsf{N}(AX) \leqslant \mathsf{N}(X).$$

Après simplification par le réel strictement positif $\mathsf{N}(X)$, on obtient de nouveau $|\lambda| \leqslant 1$.

II.5 Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A

II.5.1 Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\Phi(AX) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right)x_j\\ \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j \text{ (d'après la question II.3.3)}\\ = \Phi(X).\end{aligned}$$

II.5.2 $\Phi(\Omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 > 0$. Donc, Φ est une forme linéaire non nulle puis $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Puisque $\Phi(\Omega)$ n'est pas nul, Ω n'est pas dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$. On sait alors que la droite $E_1(A) = \mathrm{Vect}(\Omega)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a montré que

$$\boxed{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi).}$$

II.5.3 Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{1\}$ puis $X \in E_\lambda(A)$.

$$\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X),$$

puis $(1 - \lambda)\Phi(X) = 0$ et donc $\Phi(X) = 0$ ou encore $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a montré que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{1\},\ E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}(\Phi).}$$

II.5.4 Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $f(X) = AX$. D'après la question II.5.1, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$X \in \mathrm{Ker}(\Phi) \Rightarrow \Phi(X) = 0 \Rightarrow \Phi(AX) = 0 \Rightarrow \Phi(f(X)) = 0 \Rightarrow f(X) \in \mathrm{Ker}(\Phi).$$

Donc $\mathrm{Ker}(\phi)$ est stable par f. Mais alors, dans une base adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ où A' est une certaine matrice carrée de format $n-1$. Un calcul par blocs montre que

$$\chi_A = \chi_f = (1 - X)\chi_{A'}.$$

A' est la matrice de $f_{/\mathrm{Ker}(\phi)}$ dans une certaine base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Si 1 est racine de $\chi_{A'}$, alors 1 est valeur propre de l'endomorphisme $f_{/\mathrm{Ker}(\phi)}$ et il existe $X \neq 0$ tel que $f_{/\mathrm{Ker}(\phi)}(X) = X$. Mais alors X est un vecteur non nul élément de $E_1(A) \cap \mathrm{Ker}(\Phi)$. Ceci contredit le résultat de la question II.5.2 et donc 1 n'est pas racine de $\chi_{A'}$.

On a montré que $\chi_A = \chi_f = (1 - X)\chi_{A'}$ avec $\chi_{A'}(1) \neq 0$ et donc que

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A.}$$

