SESSION 2012

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Partie I : cas d'une matrice à coefficients constants

I.1 Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout réel t, on pose $X(t) = e^{\lambda t}V$. La fonction X est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_0) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV \\ &\Leftrightarrow AV = \lambda V \text{ (car } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\lambda t} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow V \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda \text{ (car } V \neq 0). \end{aligned}$$

I.2 Un exemple

I.2.1 Déterminons les éléments propres de A. En développant suivant la deuxième ligne puis encore une fois suivant la deuxième ligne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)(X^2+1)$$
$$= (X-1)(X-2)(X-i)(X+i).$$

Ainsi, A a quatre valeurs simples dans $\mathbb{C}$. Par suite, A est diagonalisable et les sous-espaces propres de A sont des droites.

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

• $V \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y+z-t=0 \\ y=0 \\ y=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ -x+z-t=0 \\ x+z-t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \\ t=z \end{array}\right.$. Donc $E_1(A) = \text{Vect}(e_3+e_4)$.

• $V \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-y+z-t=0 \\ y-z=0 \\ x-y+z-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=y \\ -2x-t=0 \\ x-2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=z \\ x=0 \\ t=0 \end{array}\right.$. Donc $E_2(A) = \text{Vect}(e_2+e_3)$.

• $V \in E_i(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -ix-y+z-t=0 \\ (2-i)y=0 \\ y+(1-i)z=0 \\ x-y+z-it=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=z=0 \\ -ix-t=0 \\ x-it=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ x=it \end{array}\right.$. Donc $E_i(A) = \text{Vect}(ie_1+e_4)$.

• Un calcul conjugué fournit $E_{-i}(A) = \text{Vect}(-ie_1+e_4)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $X_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3(t) = e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4(t) = e^{it}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille de solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$. Vérifions que cette famille est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} cie^{it} - die^{-it} = 0 \\ be^{2t} = 0 \\ ae^t + be^{2t} = 0 \\ ae^t + ce^{it} + de^{-it} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c - d = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c + d = 0 \end{array}\right. \quad \text{(obtenu quand } t = 0)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c - d = 0 \\ c + d = 0 \end{array}\right. \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre. Puisque (S_0) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, (X_1, X_2, X_3, X_4) est un système fondamental de solutions de (E_0).

$$\boxed{(S_0) = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ice^{it} - ide^{-it} \\ be^{2t} \\ ae^t + be^{2t} \\ ae^t + ce^{it} + de^{-it} \end{pmatrix},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \right\}.}$$

I.2.2 Soit X une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$X \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{ll} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t & \text{(I)} \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t & \text{(II)} \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) & \text{(III)} \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - te^t & \text{(IV)} \end{array}\right.$$

(II) admet la solution particulière $x_2\ :\ t \mapsto -e^t$. On prend donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_2(t) = -e^t$ et (III) s'écrit $x_3'(t) = x_3(t) - e^t$ qui admet la solution particulière $x_3\ :\ t \mapsto -te^t$. On prend donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_3(t) = -te^t$.
(I) et (IV) s'écrivent alors $\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = -x_4(t) + e^t \\ x_4'(t) = x_1(t) + e^t - 2te^t \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x_4(t) = -x_1'(t) + e^t \\ (-x_1'(t) + e^t)' = x_1(t) + e^t - 2te^t \end{array}\right.$ ou enfin $\left\{\begin{array}{l} x_4(t) = -x_1'(t) + e^t \\ x_1''(t) = -x_1(t) + 2te^t \end{array}\right.$. Cherchons une solution particulière de la deuxième équation de la forme $x_1\ :\ t \mapsto (at + b)e^t$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x_1'' + x_1)(t) = (at + b + 2a + at + b)e^t = (2at + 2a + 2b)e^t$ et on peut prendre $a = 1$ et $b = -1$ puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = (t - 1)e^t$ et enfin $x_4(t) = -e^t - (t - 1)e^t + e^t = (-t + 1)e^t$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc $t \mapsto \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -te^t \\ (-t+1)e^t \end{pmatrix}$ et finalement

$$\boxed{(S) = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ice^{it} - ide^{-it} + (t-1)e^t \\ be^{2t} - e^t \\ ae^t + be^{2t} - te^t \\ ae^t + ce^{it} + de^{-it} + (-t+1)e^t \end{pmatrix},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \right\}.}$$

Enfin, $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ic - id - 1 = -1 \\ b - 1 = -1 \\ a + b = -1 \\ a + c + d + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -1 \\ c - d = 0 \\ c + d = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a = -1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array}\right.$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -(t+1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -(t+1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}.}$$

Partie II : matrice résolvante

II.1 Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$X(t_0) = V \Leftrightarrow \Phi_{t_0}(X) = V \Leftrightarrow X = \Phi_{t_0}^{-1}(V) \Leftrightarrow \Phi_t(X) = \Phi_t(\Phi_{t_0}^{-1}(V)) \Leftrightarrow X(t) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V).$$

II.2

II.2.1 Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ème colonne de la matrice considérée est constituée des coordonnées de $\Phi_{t_0}(X_j) = X_j(t_0)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cette j-ème colonne est donc $X_j(t_0)$ puis la matrice demandée est

$$W(t_0) = (X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)).$$

II.2.2 Puisque Φ_{t_0} est un isomorphisme, la matrice $W(t_0)$ est inversible. $W(t_0){-}1$ est la matrice de $\Phi(t_0)^{-1}$ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis à la base $(X_1, \dots, X_n)$ de (S_0) et $\Phi(t)$ est la matrice de $\Phi(t)$ relativement à la base $(X_1, \dots, X_n)$ de (S_0) puis à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc, $R(t, t_0)$ est la matrice de $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En particulier, cette matrice ne dépend pas du système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ choisi.

II.3 Propriétés de la résolvante

II.3.1 La fonction W est dérivable sur I et il en de même de la fonction $t \mapsto R(t, t_0)$. Pour tout réel $t \in I$,

$$W'(t) = (X_1'(t) \dots, X_n'(t)) = (A(t)X_1(t), \dots, A(t)X_n(t)) = A(t)(X_1(t), \dots, X_n(t)) = A(t)W(t),$$

puis (d'après un résultat admis dans le paragraphe « notations »)

$$R'(t, t_0) = A(t)W(t)(W(t_0))^{-1} = A(t)R(t, t_0).$$

Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $X(t) = R(t, t_0)V$. La fonction X est dérivable sur I et pour tout $t \in I$

$$X'(t) = R'(t, t_0)V = A(t)R(t, t_0)V = A(t)X(t).$$

De plus, $X(t_0) = W(t_0)(W(t_0))^{-1}V = V$. X est donc la solution de (S_0) telle que $X(t_0) = V$.

II.3.2 Soit $(t, t_0, t_1, t_2) \in I^4$.

$$R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = W(t_2)(W(t_1))^{-1}W(t_1)(W(t_0))^{-1} = W(t_2)(W(t_0))^{-1} = R(t_2, t_0).$$

En particulier,

$$R(t, t_0)R(t_0, t) = R(t, t) = W(t)(W(t))^{-1} = I_n,$$

et donc $(R(t, t_0))$ est inversible à gauche et donc inversible et $(R(t, t_0))^{-1} = R(t_0, t)$.

II.4 Application de la résolvante : recherche d'une solution particulière de l'équation (E)

II.4.1 Soient V une fonction dérivable sur I puis $X\ :\ t \mapsto R(t, t_0)V(t)$. X est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)R(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t).$$

Par suite,

$$X \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall t \in I,\ A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)X(t) + B(t) \Leftrightarrow R(t, t_0)V'(t) = B(t).$$

On note (E') l'équation $R(t, t_0)V'(t) = B(t)$.

II.4.2 (erreur d'énoncé) Puisque pour tout $t \in I$, la matrice $R(t, t_0)$ est inversible,

$$V \text{ solution de } (E') \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall t \in I,\ V'(t) = (R(t, t_0))^{-1}B(t) \Leftrightarrow \forall t \in I,\ V'(t) = R(t_0, t)B(t)$$
$$\Leftarrow \forall t \in I,\ V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\ du.$$

Donc l'application $V\ :\ t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\ du$ est une solution particulière de (E') sur I.

II.4.3 Mais alors l'application $Y\ :\ t \mapsto R(t, t_0)V(t) = R(t, t_0)\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\ du$ est une solution particulière de (E) sur I. Vérifions maintenant que $R(t, t_0)\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\ du = \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, u)B(u)\ du$. Notons $\alpha_{i,j}$ les coefficients de la matrice $R(t, t_0)$ et $\beta_{i,j}(u)$ les coefficients de la matrice $R(t_0, u)B(u)\ du$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $R(t, t_0)\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)\ du$ est

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} \int_{t_0}^{t} \beta_{k,j}(u)\ du = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\beta_{k,j}(u) \right)\ du,$$

et est donc aussi le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $\int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,u)B(u)\ du$ ce qui démontre l'égalité. Par suite, pour tout $t \in I$,

$$Y(t) = R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)B(u)\ du = \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\ du = \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,u)B(u)\ du.$$

L'application $Y\ :\ t \mapsto R(t,t_0)V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\ du$ est une solution particulière de (E) sur I.

Partie III : une application de la résolvante

III.1

III.1.1 Soit P un polynôme non nul dont le degré est noté $m \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X(X-1)P'' + 3P' - 6P$ est de degré au plus m. De plus, le coefficient de X^m dans $X(X-1)P''+3P'-6P$ est $(m(m-1)-6)\mathrm{dom}(P)$ ou encore $(m^2-m-6)\mathrm{dom}(P)$ ou enfin $(m-3)(m+2)\mathrm{dom}(P)$.

Si P est solution de (e_0), puisque $\mathrm{dom}(P) \neq 0$ et $m+2 \neq 0$, on a nécessairement $m = 3$. Posons donc $P = aX^3+bX^2+cX+d$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} X(X-1)P'' + 3P' - 6P &= (X^2-X)(6aX+2b) + 3(3aX^2+2bX+c) - 6(aX^3+bX^2+cX+d) \\ &= (3a-4b)X^2 + (4b-6c)X + (3c-6d), \end{aligned}$$

puis

$$P \text{ est solution de } (e_0) \Leftrightarrow 3a = 4b = 6c = 12d \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}/\ P = d(4X^3+3X^2+2X+1).$$

Les polynômes solutions de (e_0) sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de la forme $t \mapsto k(4t^3+3t^2+2t+1)$, $k \in \mathbb{R}$. De plus, pour un tel polynôme, $P(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ et donc il existe un polynôme et un seul solution de (e_0) sur $\mathbb{R}$ tel que $P(0) = 1$ à savoir

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 4t^3+3t^2+2t+1.}$$

III.1.2 La fonction Q est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout réel $t \in]-1,1[$,

$$t(t-1)Q''(t) = 3Q'(t) - 6Q(t) = \frac{6t(t-1)}{(1-t)^4} + \frac{6}{(1-t)^3} - \frac{6}{(1-t)^2} = 6\frac{t^2-t+1-t-1+2t-t^2}{(1-t)^4} = 0.$$

Donc la fonction Q est solution de (e_0) sur $]-1,1[$.

III.1.3

III.1.3.1 Les fonctions P et Q sont développables en série entière et donc (e_0) admet des solutions non nulles développables en série entière. Soit y une solution de (e_0) développable en série entière. Il existe $R > 0$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que pour tout $t \in]-R,R[$, $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, R étant le rayon de convergence de la série précédente.

On sait que la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout réel $t \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} t(t-1)y''(t) + 3ty'(t) - 6y(t) &= (t^2-t)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + 3\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} - 6\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_k t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + 3\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} - 6\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k^2-k-6)a_k t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-4)a_k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k-3)(k+2)a_k - (k+1)(k-3)a_{k+1}\right) t^k, \end{aligned}$$

puis par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (e_0) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N},\ (k-3)(k+2)a_k-(k+1)(k-3)a_{k+1}=0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{3\},\ a_{k+1}=\frac{k+2}{k+1}a_k\\
&\Leftrightarrow a_1=2a_0,\ a_2=3a_0,\ a_3=4a_0 \text{ et } \forall k\geqslant 4,\ a_{k+1}=\frac{k+2}{k+1}a_k.
\end{aligned}$$

Si $a_4=0$, alors $\forall k\geqslant 4$, $a_k=0$ et le rayon de convergence de la série précédente est $+\infty$.
Si $a_4\neq 0$, alors $\forall k\geqslant 4$, $a_k\neq 0$ puis, pour $k\geqslant 4$, $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{k+2}{k+1}$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=1$. Dans ce cas, le rayon de convergence de la série précédente est 1.

III.1.3.2 Si $a_4=0$, on a obtenu les fonctions de la forme $t\mapsto a_0P(t)$, $a_0\in\mathbb{R}$.

Supposons dorénavant $a_4\neq 0$.

$$\begin{aligned}
\forall k\geqslant 4,\ a_{k+1}=\frac{k+2}{k+1}a_k &\Leftrightarrow \forall k\geqslant 5,\ a_k=\left(\prod_{i=5}^{k}\frac{i+1}{i}\right)a_4\\
&\Leftrightarrow \forall k\geqslant 5,\ a_k=\frac{k+1}{5}a_4.
\end{aligned}$$

En récupérant le cas où $a_4=0$, dans tous les cas, on a obtenu les fonctions de la forme $t\mapsto a_0P(t)+\dfrac{a_4}{5}\sum\limits_{k=4}^{+\infty}(k+1)t^k$, $(a_0,a_4)\in\mathbb{R}^2$.

Maintenant, pour tout $t\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}t^k$. En dérivant, on obtient

$$Q(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^k=P(t)+\sum_{k=4}^{+\infty}(k+1)t^k.$$

Donc, pour tout $t\in]-1,1[$, $a_0P(t)+a_4\sum\limits_{k=4}^{+\infty}(k+1)t^k=\left(a_0-\dfrac{a_4}{5}\right)P(t)+\dfrac{a_4}{5}Q(t)$. En posant $\lambda=a_0-\dfrac{a_4}{5}$ et $\mu=\dfrac{a_4}{5}$ ou plutôt, λ et μ étant des réels donnés, en prenant $a_0=\lambda+\mu$ et $a_4=5\mu$, on a obtenu les fonctions de la forme $\lambda P+\mu Q$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

III.2

III.2.1 Soit $z=y'$.

$$\begin{aligned}
\forall t\in I,\ y''(t)+a(t)y'(t)+b(t)y(t)=\varphi(t) &\Leftrightarrow \forall t\in I,\ \left\{\begin{array}{l} y'(t)=z(t)\\ z'(t)=-b(t)y(t)-a(t)z(t)+\varphi(t)\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \forall t\in I,\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -b(t) & -a(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \varphi(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les matrices $A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -b(t) & -a(t)\end{pmatrix}$ et $B(t)=\begin{pmatrix} 0\\ \varphi(t)\end{pmatrix}$ conviennent.

III.2.2 On connait l'inverse d'une matrice de format 2 inversible : $(W(t_0))^{-1}=\dfrac{1}{f_0g_0'-f_0'g_0}\begin{pmatrix} g_0' & -g_0\\ -f_0' & f_0\end{pmatrix}$ puis

$$R(t,t_0)=\frac{1}{f_0g_0'-f_0'g_0}\begin{pmatrix} f & g\\ f' & g'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_0' & -g_0\\ -f_0' & f_0\end{pmatrix}=\frac{1}{f_0g_0'-f_0'g_0}\begin{pmatrix} fg_0'-gf_0' & gf_0-fg_0\\ f'g_0'-g'f_0' & g'f_0-f'g_0\end{pmatrix}.$$

III.3

III.3.1 Sur I, (e) s'écrit $y''+\dfrac{3}{t(t-1)}y'-\dfrac{6}{t(t-1)}y=\dfrac{20t^4}{t(t-1)}$.

Donc ici, $A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 6/(t(t-1)) & -3(t(t-1))\end{pmatrix}$ et $B(t)=\begin{pmatrix} 0\\ 20t^4/(t(t-1))\end{pmatrix}$

III.3.2 Pour tout $u \in I$,

$$\begin{aligned}\det(W(u)) = P(u)Q'(u) - P'(u)Q(u) &= \frac{2(4u^3+3u^2+2u+1)-(12u^2+6u+2)(1-u)}{(1-u)^3}\\ &= \frac{20u^3}{(1-u)^3}.\end{aligned}$$

Pour tout $(t,u) \in I^2$,

$$\begin{aligned}Q(t)P(u)-P(t)Q(u) &= \frac{(4u^3+3u^2+2u+1)(1-u)^2-(4t^3+3t^2+2t+1)(1-t)^2}{(1-t)^2(1-u)^2}\\ &= \frac{(4u^3+3u^2+2u+1)(u^2-2u+1)-(4t^3+3t^2+2t+1)(t^2-2t+1)}{(1-t)^2(1-u)^2}\\ &= \frac{(4u^5-5u^4)-(4t^5-5t^4)}{(1-t)^2(1-u)^2}.\end{aligned}$$

III.3.3 D'après la question II.4.3, une solution particulière de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est

$$\begin{pmatrix} y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = Y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\ du.$$

où seule la première composante du second membre nous intéresse. D'après la question III.2.2,

$$R(t,u)B(u) = \frac{1}{W(u)}\begin{pmatrix} \times & Q(t)P(u)-P(t)Q(u)\\ \times & \times\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 20u^4/(u(u-1))\end{pmatrix}$$

et donc d'après la question III.3.2,

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{t_0}^{t}\frac{Q(t)P(u)-P(t)Q(u)}{W(u)}\times\frac{20u^4}{u(u-1)}\ du = \int_{t_0}^{t}\frac{(1-u)^3}{20u^3}\frac{(4u^5-5u^4)-(4t^5-5t^4)}{(1-t)^2(1-u)^2}\times\frac{20u^4}{u(u-1)}\ du\\ &= \frac{1}{(1-t)^2}\int_{t_0}^{t}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\ du.\end{aligned}$$

Quand $t_0 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{(1-t)^2}\int_0^t(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\ du = \frac{1}{(1-t)^2}\left(t(4t^5-5t^4)-\frac{2t^6}{3}+t^5\right)\\ &= \frac{10t^6-12t^5}{3(1-t)^2} = \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2}.\end{aligned}$$

Vérifions que y est solution de (e) sur $]0,1[$. Pour $t \in]0,1[$, posons $z(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}\displaystyle\int_{1/2}^{t}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\ du$. z est une solution de (e) sur $]0,1[$ puis, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}y(t)-z(t) &= \frac{1}{(1-t)^2}\int_0^{1/2}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\ du\\ &= \frac{a(4t^5-5t^4)+b}{(1-t)^2}\ \text{(où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes indépendantes de } t)\\ &= a\frac{4t^5-8t^4+4t^3+3t^4-6t^3+3t^2+2t^3-4t^2+2t+t^2-2t+1-1}{(1-t)^2}+bQ(t)\\ &= a(4t^3+3t^2+2t+1)+(b-a)Q(t) = aP(t)+(b-a)Q(t).\end{aligned}$$

D'après la question III.1, $y-z$ est une solution de (e_0) sur $]0,1[$ et donc, puisque z est solution de (e) sur $]0,1[$, $y = z+aP+(b-a)Q$ est solution de (e). On note dorénavant y_0 la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}\displaystyle\int_0^t(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\ du = \dfrac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2}$.

Puisque les fonctions $t \mapsto \frac{3}{t(t-1)}$, $t \mapsto -\frac{6}{t(t-1)}$ et $t \mapsto \frac{20t^4}{t(t-1)}$ sont continues sur $]0,1[$, on sait que les solutions de (e) sur $]0,1[$ sont les fonctions de la forme $y\ :\ t \mapsto \lambda P + \mu Q + y_0$, $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. Une telle fonction est encore solution de (e) sur $[0,1]$ par continuité de ces fonctions et de leurs dérivées successives en 0.
Réciproquement, soit y une solution de (e) sur $[0,1[$. y est en particulier solution de (e) sur $]0,1[$ et donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in]0,1[$, $y(t) = \lambda P(t) + \mu Q(t) + y_0(t)$. y devant être deux fois dérivable sur $[0,1[$, y doit être continue en 0 et donc $\forall t \in [0,1[$, $y(t) = \lambda P(t) + \mu Q(t) + y_0(t)$.

Les solutions de (e) sur $[0,1[$ sont les $t \mapsto \lambda(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1) + \frac{\mu}{(1-t)^2} + \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit y une telle fonction. Le développement limité de y à l'ordre 1 en 0 à droite est

$$y(t) = \lambda(1+2t) + \mu(1+2t) + o(t) = (\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)t + o(t).$$

Par suite, $y(0) = y'(0) = 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda$. Il existe une infinité de solutions y de (e) sur $[0,1[$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$ à savoir les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda\left(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 - \frac{1}{(1-t)^2}\right) + \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

