SESSION 2012

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I : le polylogarithme

I-1.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(\alpha) \neq 0$ puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

D'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{R_a = 1.}$$

I-1.2. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Donc L_α est classe C^∞ sur $]-1,1[$.

I-1.3. Soit $x \in]-1,1[$. Alors $-x \in]-1,1[$ et donc $L_\alpha(-x)$ existe puis

$$\begin{aligned} L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n^\alpha} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha} = 2^{1-\alpha} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^p}{p^\alpha} \\ &= 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[,\ L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).}$$

I-2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$x L'_{\alpha+1}(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = L_\alpha(x).$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[,\ x L'_{\alpha+1}(x) = L_\alpha(x).}$$

I-2.2. Pour tout $x \in]-1,1[$, $L_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $L_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $L_{-1}(x) = x L'_0(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

I-3. Soit $\alpha \leqslant 1$. Pour $x \in [0,1[$, $L'_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}} \geqslant 0$. Donc, la fonction L_α est croissante sur $[0,1[$. On en déduit que L_α admet une limite ℓ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures où $\ell \in]-\infty, +\infty]$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1[$, $L_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^\alpha}$. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Ainsi,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \ell \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}. \quad (*)$$

Puisque $\alpha \leqslant 1$, on sait que la série de RIEMANN de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, diverge.

Plus précisément, $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right) = +\infty$. Quand N tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $\ell \geqslant +\infty$ et finalement

$$\boxed{\forall \alpha \in]-\infty, 1],\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L_\alpha(x) = +\infty.}$$

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

II-1.1. Soit $\alpha > 1$. On sait que la série de RIEMANN de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, converge et donc $L_\alpha(1)$ existe. Mais alors, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, converge absolument et en particulier converge et donc $L_\alpha(-1)$ existe. En résumé, la fonction L_α est définie sur $[-1, 1]$.

Vérifions que L_α est continue sur $[-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$. Chaque fonction f_n est continue sur $[-1, 1]$ et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Puisque $\alpha > 1$, la série numérique de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, converge et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge normalement sur $[-1, 1]$.

En résumé,

- Chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est continue sur $[-1, 1]$.
- La série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge normalement vers la fonction L_α sur $[-1, 1]$.

On en déduit que la fonction L_α est continue sur $[-1, 1]$.

II-1.2. D'après la question précédente, la fonction L_2 est définie et continue sur $[-1, 1]$. D'après les questions I-2.2 et I-3,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L_2'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{L_1(x)}{x} = +\infty.$$

D'après un théorème classique d'analyse, la fonction L_2 n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe représentative admet en 1 une demi-tangente parallèle à (Oy).

II-2.1. Soit $\alpha > 1$. Pour tout réel strictement positif u, $e^u - 1 > 0$. Donc, la fonction $\varphi\ :\ u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, la fonction φ est positive sur $]0, +\infty[$.

• Quand u tend vers 0 par valeurs supérieures, $\varphi(u) \sim \frac{u^{\alpha-1}}{u} = u^{\alpha-2}$. Puisque $\alpha - 2 > -1$, la fonction $u \mapsto u^{\alpha-2}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et donc la fonction φ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• Quand u tend vers $+\infty$, $u^2\varphi(u) \sim u^{\alpha+1}e^{-u}$. D'après un théorème de croissances comparées, $u^2\varphi(u)$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$ ou encore $\varphi(u)$ est négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ quand u tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction φ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II-2.2. On sait déjà que l'intégrale proposée existe que $x = 1$. Soit $x < 1$. Pour tout réel strictement positif u, $e^u - x > 1 - x > 0$. Donc, la fonction $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ quand u tend vers $+\infty$. La fonction $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit l'existence $K_\alpha(x)$.

II-2.3. Posons $\begin{array}{rccc} \Phi : &]-\infty,1]\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & (x,u) & \mapsto & \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-x} \end{array}$.

• Pour tout $x\in]-\infty,1]$, la fonction $u\mapsto\Phi(x,u)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout $u\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,u)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• Pour $x\in]-\infty,1]$ et $u\in]0,+\infty[$, $e^u-x\geqslant e^u-1>0$ et donc pour tout $(x,u)\in]-\infty,1]\times]0,+\infty[$, $|\Phi(x,u)|=\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}\leqslant\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}=\varphi(u)$ où φ est une fonction continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question II-2.1.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\text{la fonction } K_\alpha \text{ est continue sur }]-\infty,1].}$$

II-2.4. Soit $\alpha>2$. La fonction Φ admet sur $]-\infty,1]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall(x,u)\in]-\infty,1]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u)=\frac{u^{\alpha-1}e^u}{(e^u-x)^2}.$$

• Pour tout $x\in]-\infty,1]$, la fonction $u\mapsto\Phi(x,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty$ et la fonction $u\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout $u\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u)$ est continue sur $]-\infty,1]$.
• Pour tout $(x,u)\in]-\infty,1]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,u)\right|\leqslant\dfrac{u^{\alpha-1}e^u}{(e^u-1)^2}=\varphi_1(u)$. La fonction φ_1 est continue et positive sur $]0,+\infty[$, est équivalente en à $u^{\alpha-3}$ avec $\alpha-3>-1$ et est négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction φ_1 est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), la fonction K_α est de classe C^1 sur $]-\infty,1]$ et

$$\boxed{\forall\alpha>2,\ \forall x\in]-\infty,1],\ K'_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}e^u}{(e^u-x)^2}.}$$

II-2.5. On reprend la démonstration précédente en remplaçant $]-\infty,1]\times]0,+\infty[$ par $[a,b]\times[0,+\infty[$. On prend pour fonction φ_1 la fonction $u\mapsto\dfrac{u^{\alpha-1}e^u}{(e^u-a)^2}$. Cette fonction est continue et positive sur $[0,+\infty[$, négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ et donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de Leibniz, la fonction K_α est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ avec $a<b<1$ et donc la fonction K_α est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ et

$$\boxed{\forall\alpha>1,\ \forall x\in]-\infty,1[,\ K'_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}e^u}{(e^u-x)^2}.}$$

II-3.1. Soit $\alpha>1$. La fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Donc la fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit l'existence de G_α.

G_α est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0,+\infty[$ et donc $G_\alpha>0$.

II-3.2. Soient $u\in]0,+\infty[$ et $x\in[-1,1]$. Alors $|xe^{-u}|\leqslant e^{-u}<1$ puis

$$\frac{1}{e^u-x}=\frac{e^{-u}}{1-xe^{-u}}=e^{-u}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(xe^{-u}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}x^ke^{-(k+1)u}.$$

II-3.3. Soit $x\in[-1,1]$. Pour $u\in]0,+\infty[$, posons $g_k(u)=u^{\alpha-1}x^{k+1}e^{-(k+1)u}$.

D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(u) = xu^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u} = \frac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x},$$

et la série de fonctions de terme général g_k, $k \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $u \mapsto \dfrac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x}$. De plus la fonction $u \mapsto \dfrac{xu^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |g_k(u)|\ du &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}\left(\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}\ du\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{k+1}\right)^{\alpha-1} e^{-t}\ \frac{dt}{k+1}\right) \text{ (en posant } t = (k+1)u)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha}G_\alpha = G_\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^\alpha}\\ &= G_\alpha L_\alpha(x) < +\infty.\end{aligned}$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$xK_\alpha(x) = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(u)\right) du = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_k(u)\ du = G_\alpha L_\alpha(x).$$

$$\boxed{\forall\alpha > 1,\ \forall x \in [-1, 1],\ xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).}$$

II-4.1. Soit $\alpha > 1$. D'après les questions II.2.2 et II.2.4, la fonction K_α est continue sur $]-\infty, 1]$? et de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$. Il en est de même de la fonction L_α.

II-4.2. Soient $/\mathrm{alpha} > 1$ et $x \leqslant 1$. L'application $u \mapsto e^{-u} = t$ est un C^1-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. On peut donc poser $t = e^{-u}$ ou encore $u = -\ln t$ et on obtient

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{1 - xe^{-u}}\ du = \frac{x}{G_\alpha}\int_1^0\frac{(-\ln t)^{\alpha-1}t}{1 - xt}\ \left(-\frac{dt}{t}\right) = \frac{x}{G_\alpha}\int_1^0\frac{(-\ln t)^{\alpha-1}}{1 - xt}\ dt.$$

II-4.3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash]1, +\infty[$. Posons $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

Pour tout $u \in]0, +\infty[$, $e^u - z \neq 0$ et donc la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour tout $u \in]0, +\infty[$,

$$|e^u - z| = |(e^u - a) + ib| = \sqrt{(e^u - a)^2 + b^2}.$$

Donc, pour tout $u \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\right| = \dfrac{u^{\alpha-1}}{\sqrt{(e^u - a)^2 + b^2}}$. On sait déjà que la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ce qui le règle le cas où $(a, b) = (1, 0)$.

Si $(a, b) \neq (1, 0)$ (et $(a, b) \notin]1, +\infty[\times\{0\}$), pour tout $u \in [0, +\infty[$, $(e^u - a)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow e^u = a$ et $b = 0$ ce qui est impossible car $(a, b) \notin]1, +\infty[\times\{0\}$. Donc la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\sqrt{(e^u - a)^2 + b^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, cette fonction est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{u^2}$ et finalement la fonction $u \mapsto \left|\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\right|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit l'existence de $/\mathrm{dfraczG}_\alpha\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\ du$.

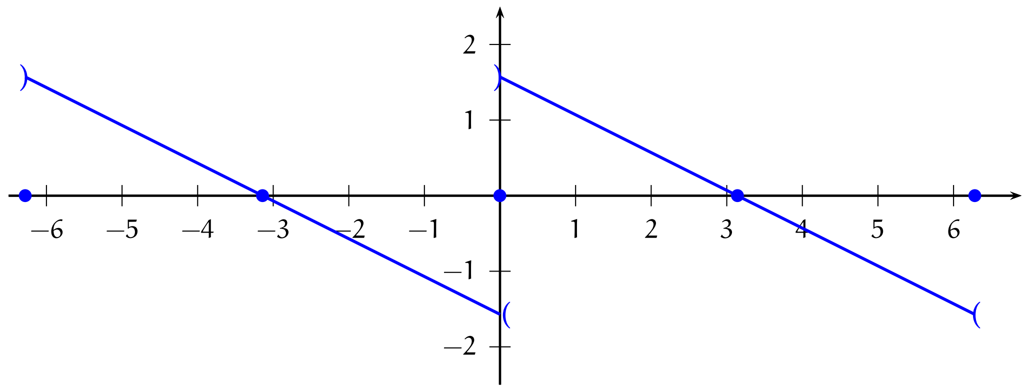
Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^2 \notin]1, +\infty[\Leftrightarrow z \notin (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$. Soit donc $z \in \mathbb{C}\setminus(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$. Alors, $z \notin]1, +\infty[$ et $-z \notin]1, +\infty[$ puis

$$\begin{aligned}L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) &= \frac{z}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\ du - \frac{z}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^u + z}\ du = \frac{2z^2}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^{2u} - z^2}\ du\\ &= \frac{2z^2}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\dfrac{v}{2}\right)^{\alpha-1}}{e^v - z^2}\ \frac{dv}{2} = 2^{1-\alpha}\frac{z^2}{G_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{e^v - z^2}\ dv\\ &= 2^{1-\alpha}L_\alpha(z^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \alpha > 1,\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[),\ L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).}$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

III-1.1. Graphe de f.



Puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on peut calculer les coefficients de FOURIER de f. Puisque f est impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\pi - x}{2}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \cos(nx)\ dx\right) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}.$$

III-1.2. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc appliquer la formule de PARSEVAL et on obtient

$$\begin{aligned} L_2(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{(\pi - x)^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$L_2(1) + L_2(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}L_2(1),$$

et donc $L_2(-1) = -\dfrac{L_2(1)}{2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{L_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } l_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

III-2.1. La fonction L_2 et la fonction ln sont de classe C^1 sur $]0, 1[$. De plus, pour tout $x \in]0, 1[$, $1 - x \in]0, 1[$. Par suite, les fonctions $x \mapsto L_2(1 - x)$ et $x \mapsto \ln(1 - x)$ sont de classe C^1 sur $]0, 1[$. Il en est de même de la fonction Φ.

III-2.2. Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= L_2'(x) - L_2'(1 - x) + \frac{1}{x}\ln(1 - x) - \frac{1}{1 - x}\ln(x) \\ &= \frac{L_1(x)}{x} + \frac{\ln(1 - x)}{x} - \frac{L_1(1 - x)}{1 - x} - \frac{\ln(x)}{1 - x} \text{ (d'après la question I-2.1)} \\ &= -\frac{\ln(1 - x)}{x} + \frac{\ln(1 - x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1 - x} - \frac{\ln(x)}{1 - x} \text{ (d'après la question I-2.2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction Φ est dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$ et sa dérivée est nulle sur $]0, 1[$. On en déduit que la fonction Φ est constante sur $]0, 1[$. Par suite, $\forall x \in]0, 1[$, $\Phi(x) = \lim\limits_{t \to 0} \Phi(t)$. D'après la question II-1.1, la fonction L_2 est continue sur $[-1, 1]$.

En particulier, $\lim\limits_{t\to 0} L_2(t) = L_2(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} L_2(1-t) = L_2(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Enfin, quand t tend vers 0, $\ln(t)\ln(1-t) \sim -t\ln(t)$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)\ln(1-t) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Finalement, $\lim\limits_{t\to 0} \Phi(t) = L_2(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ puis

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x) = L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

III-2.3. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $2L_2\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln^2\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et donc

$$\boxed{L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.}$$

III-2.4. La fonction homographique $\alpha\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ est strictement décroissante sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$ et donc pour $-1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $\alpha\left(-\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \dfrac{x}{x-1} \leqslant \alpha(-1)$ ou encore $-1 \leqslant \dfrac{x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ avec égalités effectivement obtenue pour $x = -1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

Pour $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, posons $\Psi(x) = L_2(x) + L_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \dfrac{1}{2}(\ln(1-x))^2$. D'après ce qui précède, la fonction Ψ est définie et continue sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-1, \dfrac{1}{2}\right[\setminus \{0\}$, d'après la question I-2.1,

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{L_1(x)}{x} - \frac{L_1\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1} \times (x-1)^2} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{x-1}\right)}{x(x-1)} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x(x-1)} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln(1-x)}{x(x-1)}(-(x-1) - 1 + x) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $x = 0$ par continuité de Ψ'. Ainsi, Ψ est continue sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, dérivable sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$ et sa dérivée est nulle sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$. On en déduit que ψ est constante sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$. Par suite, pour tout $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, $\Psi(x) = \Psi(0) = 2L_2(0) + \dfrac{1}{2}\ln^2 1 = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.}$$

III-3. La question II-3 appliquée avec $x = 1$ et $\alpha = 2$ fournit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,du = K_2(1) = G_2L_2(1)$ avec $G_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$.

Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}\,dt = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $G_2 = 1$ et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}\,du = K_2(1) = L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

III-4.1. Soit $x < 0$. En posant $t = xs$ ou encore $s = \dfrac{t}{x}$, on obtient (erreur d'énoncé)

$$L_2(x) = -x\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs}\,ds = -x\int_0^x \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\,\frac{dt}{x} = \int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\,dt.$$

Soit $\varepsilon \in [x, 0[$. Une intégration par parties fournit

$$\int_x^\varepsilon \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\,dt = \left[-\ln(1-t)\ln\left(\frac{t}{x}\right)\right]_x^\varepsilon + \int_x^\varepsilon \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\ln(1-\varepsilon)\ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) + \int_x^\varepsilon \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

Quand ε tend vers 0, $-\ln(1-\varepsilon)\ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) = -\ln(1-\varepsilon)(\ln(-\varepsilon)-\ln(-x)) \sim \varepsilon\ln(-\varepsilon)$ et donc $-\ln(1-\varepsilon)\ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. Quand ε tend vers 0, on obtient $\displaystyle\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\,dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

III-4.2. Soient $x < 0$ puis $\varepsilon \in [x, 0[$.

$$\int_x^\varepsilon \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln^2(1-t)\right]_x^\varepsilon = \frac{1}{2}\ln^2(1-\varepsilon) - \frac{1}{2}\ln^2(1-x).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln^2(1-x)$.

III-4.3. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ est continue et positive sur $]-\infty, 0[$.

Quand t tend vers 0, $\dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)} \sim \dfrac{-t}{-t} = 1$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ se prolonge par continuité en 0 et en particulier est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Quand t tend vers $-\infty$, $(-t)^{3/2}\dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)} \sim \dfrac{\ln(-t)}{\sqrt{-t}}$. Par suite, $(-t)^{3/2}\dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ tend vers 0 en $-\infty$ et donc $\dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{(-t)^{3/2}}$ en $-\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ est intégrable sur un voisinage de $-\infty$ et finalement sur $]-\infty, 0[$. Par suite, A existe.

III-4.4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\ln^2(1-x) = -\infty$. D'autre part, pour $x < 0$,

$$L_2(x) - g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,dt = -\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,dt.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(L_2(x) - g(x)) = -A \in \mathbb{R}$. Par suite, $L_2(x) - g(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(g(x))$ ou encore

$$L_2(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x) = -\frac{1}{2}\ln^2(1-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{\ln^2(-x)}{2}.$$

$$\boxed{L_2(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{\ln^2(-x)}{2}.}$$

