SESSION 2012

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1 : normes équivalentes

1. Soit $f \in E$. f est de classe C^1 sur $[0,1]$. Donc la fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[0,1]$ et par suite la fonction $|f'|$ est intégrable sur le segment $[0,1]$. On en déduit que $\|f\|$ existe dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $f \in E$, $\|f\| = |f(0)| + 2\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt \geqslant 0$.
• Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\Rightarrow |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0 \Rightarrow |f(0)| = \int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0 \\
&\Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [0,1],\ |f'(t)| = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est constante sur } [0,1] \\
&\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t) = f(0) = 0 \\
&\Rightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

• Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt = |\lambda|\left(|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right) = |\lambda|\|f\|.$$

• Soit $(f,g) \in E^2$.

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,dt \leqslant |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt + 2\int_0^1 |g'(t)|\,dt = \|f\| + \|g\|.$$

On a montré que

$$\boxed{\|\ \| \text{ est une norme sur } E.}$$

2. **i)** Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel E.

$$N \text{ et } N' \text{ sont équivalentes} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2/\ \forall f \in E,\ \alpha N(f) \leqslant N'(f) \leqslant \beta N(f).$$

ii) Soit $f \in E$.

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \leqslant 4|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 2\|f\|',$$

et aussi

$$\|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \leqslant 2|f(0)| + 4\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 2\|f\|.$$

Ainsi, $\forall f \in E$, $\dfrac{1}{2}\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant 2\|f\|'$ et donc

$$\boxed{\|\ \| \text{ et } \|\ \|' \text{ sont des normes équivalentes.}}$$

3. Pour $f \in E$, posons $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt$. Montrons que les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$ ne sont pas équivalentes. Pour cela vérifions que $\sup\left\{\dfrac{\|f\|}{\|f\|_1},\ f \in E \setminus \{0\}\right\} = +\infty$. Posons $S = \sup\left\{\dfrac{\|f\|}{\|f\|_1},\ f \in E \setminus \{0\}\right\}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, posons $f_n(t) = t^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1},$$

et

$$\|f_n\| = 0 + 2\int_0^1 f_n'(t)\ dt = 2(f_n(1) - f_n(0)) = 2,$$

puis $\dfrac{\|f_n\|}{\|f_n\|_1} = 2(n+1)$. Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $S \geqslant \dfrac{\|f_n\|}{\|f_n\|_1} = 2(n+1)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $S = +\infty$.

On a montré que $\sup\left\{\dfrac{\|f\|}{\|f\|_1},\ f \in E \setminus \{0\}\right\} = +\infty$ et donc $\|\ \|_1$ n'est pas équivalente à $\|\ \|$.

EXERCICE 2 : continuité d'une fonction définie par une intégrale

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ puis $g\ :\ \begin{array}{rcl} I \times J & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & g(x,t) \end{array}$ une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$. Si

- pour tout x de I, l'application $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
- pour tout t de J, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur I,
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J telle que pour tout (x,t) de $I \times J$, $|g(x,t)| \leqslant \varphi(t)$, (hypothèse de domination)

alors la fonction $f\ :\ x \mapsto \int_J g(x,t)\ dt$ est définie et continue sur I.

2. Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, posons $g(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)\ dt$.

- pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- pour tout t de $[0,+\infty[$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout (x,t) de $\mathbb{R} \times [0,+\infty$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)} = \varphi(t)$ où φ est une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

3. $f_2(0) = 0$ puis, si $x > 0$,

$$f_2(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\ dt = \left[-e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = 1 - \lim_{t \to +\infty} e^{-xt} = 1 \text{ (car } x > 0).$$

Donc,

$$\forall x \geqslant 0,\ f_2(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{array}\right. .$$

f_2 n'est pas continue en 0. Comme la fonction $g\ :\ (x,t) \mapsto xe^{-xt}$ vérifie les deux premières hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres, g ne peut vérifier l'hypothèse de domination. Cette hypothèse de domination est donc nécessaire pour être sûr de la continuité de la fonction $x \mapsto \int_J g(x,t)\ dt$.

EXERCICE 3 : une intégrale curviligne

La forme différentielle $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ est continue sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et le cercle de centre O et de rayon 1 est contenu dans D. Une paramétrisation de ce cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est $\gamma\ :\ \left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right.$, t variant de 0 à 2π. Cette paramétrisation est de classe C^1 puis

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi.$$

Problème : comparaison de convergences

Partie I

1. **(a)** Si f est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in I\}$ ($\|f\|_\infty$ est élément de $[0,+\infty]$). La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur I si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty$ est un réel et la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

(b) Soit $x \in I$. Pour tout entier n, $0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$. Puisque la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge, il en est de même de la série numérique de terme général $|f_n(x)|$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci montre que la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente.

Ainsi, pour tout x de I, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente ou encore la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente sur I. On a montré que la convergence normale entraîne la convergence absolue.

2. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur I, cette série converge simplement sur I et pour chaque entier n et chaque x de I, on peut poser $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Soit $x \in I$. Pour tout entier naturel n,

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ est un majorant de $\{|R_n(x)|,\ x \in I\}$.

Comme $\|R_n\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $\{|R_n(x)|,\ x \in I\}$, ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|R_n\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.

Puisque la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes à l'ordre n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors, la suite $(\|R_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite des restes R_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers 0 sur I ou encore que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur I.

Ainsi, la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

3. Soit $x \in [0,1]$. La suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\left(\dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, tend vers 0 en décroissant (somme de deux suites décroissantes). On en déduit que la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées. De plus, d'après une majoration classique de la valeur absolue du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}$ et donc,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|R_n\|_\infty$. Ceci montre que

la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. La série numérique de terme général $\dfrac{x^2}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge. On en déduit que la série numérique de terme général $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge (si cette série convergeait, alors la série de terme général $\dfrac{1}{n} = |f_n(x)| - \dfrac{x^2}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergerait ce qui n'est pas). Donc

pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, n'est pas absolument convergente.

Ainsi, la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.

4. On sait que pour tout réel x, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et que la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x, posons $R_n(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, la fonction R_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout entier naturel n, $\|R_n\|_\infty$ et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

Ainsi, la convergence absolue n'entraîne pas la convergence uniforme.

Partie II

5. Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant \alpha_n \leqslant\leqslant \alpha_0$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(x)| = \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n.$$

Puisque $|x| < 1$, la série géométrique de terme général $\alpha_0(1-x)x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge et il en est de même de la série numérique de terme général $|f_n(x)|$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout réel $x \in [0,1[$, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge. On a montré que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0,1[$.

6. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f_n'(x) = \alpha_n\left(nx^{n-1}(1-x) - x^n\right) = \alpha_n x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

La fonction f_n est positive, croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} = \frac{\alpha_n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

(b) (Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'annuler une infinité de fois, on n'utilisera pas des équivalents.)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1)) = \frac{1}{e} + o(1).$$

puis

$$\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\alpha_n}{n} + o\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{e} + o(1)\right) = \frac{\alpha_n}{en} + o\left(\frac{\alpha_n}{en}\right).$$

Si la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge il en est de même de la série numérique de terme général $\dfrac{\alpha_n}{en}$, $n \in \mathbb{N}^*$, puis de la série numérique de terme général $o\left(\dfrac{\alpha_n}{en}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et finalement de la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{en} + o\left(\dfrac{\alpha_n}{en}\right)$.

Réciproquement, supposons que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Il existe un rang n_0 à partir duquel $o\left(\dfrac{\alpha_n}{en}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\alpha_n}{en}$ et donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{en} + o\left(\dfrac{\alpha_n}{en}\right) \geqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\alpha_n}{en}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors

$$0 \leqslant \frac{\alpha_n}{n} \leqslant 2e\|f_n\|_\infty.$$

Ceci montre que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$ converge. On a montré que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge ou encore

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } [0,1[\text{ si et seulement si } \sum_{n\geqslant} \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}$$

7. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

(b) On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1[$. D'après la question 5), la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. On peut donc poser $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Ensuite, d'après la question a),

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$, $|R_n(x)| \leqslant \alpha_{n+1}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|R_n\|_\infty \leqslant \alpha_{n+1}$. Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de la suite $(\|R_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0,1[$.

(c) On suppose que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0,1[$.

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Cette suite admet donc une limite que l'on note ℓ et qui est un réel positif ou nul. Supposons $\ell \neq 0$ ou encore plus précisément $\ell > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_n x^k(1-x) \\ &\geqslant \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \text{ (car la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ tend vers } \ell \text{ en décroissant)} \\ &= \ell x^{n+1}. \end{aligned}$$

Mais alors, pour tout réel $x \in [0,1[$, $\|R_n\|_\infty \geqslant |R_n(x)| \geqslant \ell x^{n+1}$. Quand x tend vers 1, on obtient $\|R_n\|_\infty \geqslant \ell$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\|R_n\|_\infty \geqslant \ell$. Comme $\ell > 0$, $\|R_n Ł_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas uniformément sur $[0,1[$. Par contraposition, si la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0,1[$ alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. On a montré que

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur } [0,1[\text{ si et seulement si } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.$$

8. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs. La série numérique de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[0, 1[$ d'après la question 6.(b).

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = 1$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ d'après la question 7.(c).

(c) On pose $\alpha_1 = 2$ et pour $n \geqslant 2$, on pose $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln n}$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0, 1[$ d'après la question 7.(c).

Vérifions que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge. Puisque la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (produit de suites positives décroissantes) et positive, la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ (comparaison série et intégrale). Or, pour $X > 2$

$$\int_2^X \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)),$$

et quand X tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = +\infty$. Mais alors série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas normalement sur $[0, 1[$ d'après la question 6.(b).

9. Ci-dessous, toute implication non écrite est fausse.

$$\begin{tikzcd}
& \text{Convergence normale} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Convergence uniforme} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Convergence absolue} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{Convergence simple} &
\end{tikzcd}$$

