SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Partie I. Etude de compacité

I.1. I.1.1. S est symétrique et est la matrice de s dans la base orthonormée $\mathscr{B}$. On sait alors que s est auto-adjoint. Le théorème spectral permet d'affirmer que le polynôme caractéristique de s est scindé sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de s. En particulier, les sous-espaces propres de s sont deux à deux orthogonaux.

$\chi_S = X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$ et donc $\mathrm{Sp}(S) = (1, 5)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}y$. Donc, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1')$ où $e_1' = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}e_1 + e_2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2$.

• Mais alors $\mathrm{Ker}(s - 5\mathrm{Id}) = (e_1')^\perp = \mathrm{Vect}(e_2')$ où $e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ puis $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

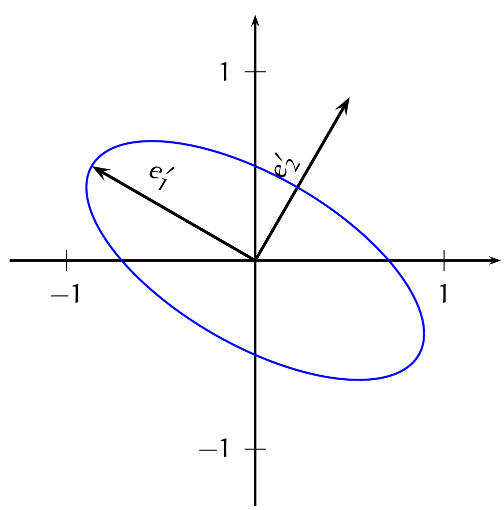
$$\begin{aligned}(x|s(x)) &= \left(x_1e_1 + x_2e_2|(2x_1 + \sqrt{3}x_2)e_1 + (\sqrt{3}x_1 + 4x_2)e_2\right) = x_1(2x_1 + \sqrt{3}x_2) + x_2(\sqrt{3}x_1 + 4x_2) \\ &= 2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2.\end{aligned}$$

Donc σ est l'ensemble d'équation $2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$. Déterminons alors une équation de σ dans le repère $\mathscr{R}' = (O, e_1', e_2')$. Soit $x = x_1'e_1' + x_2'e_2' \in \mathbb{R}^2$. Puisque (e_1', e_2') est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$,

$$(x|s(x)) = (x_1'e_1' + x_2'e_2'|x_1'e_1' + 5x_2'e_2') = x_1'^2 + 5x_2'^2.$$

Donc σ est l'ensemble d'équation $x_1'^2 + 5x_2'^2 = 1$ ou encore $\dfrac{x_1'^2}{1^2} + \dfrac{x_2'^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$ dans $\mathscr{R}'$. On reconnaît l'équation réduite d'une ellipse de centre O et d'axe focal (O, e_1').

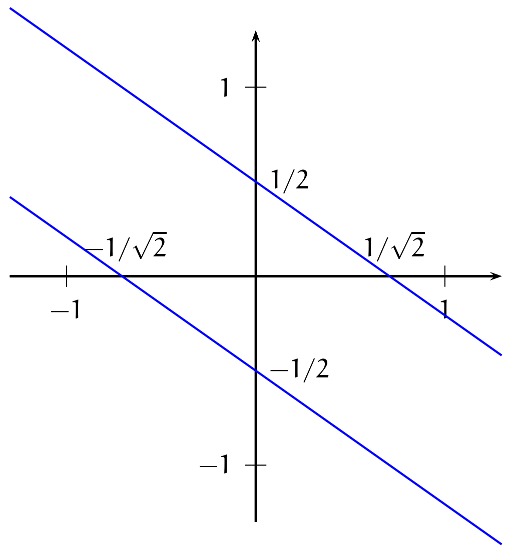
Tracé de σ.



I.1.2. Une équation de σ dans $\mathscr{R}$ est $2x_1^2+4\sqrt{2}x_1x_2+4x_2^2=1$ ou encore $2(x_1+\sqrt{2}x_2)^2=1$ ou enfin $x_1+\sqrt{2}x_2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc σ est la réunion des deux droites parallèles d'équations respectives $x_1+\sqrt{2}x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_1+\sqrt{2}x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Tracé de σ.



I.2. **I.2.1.** Puisque la base $(\epsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormée.

$$(x|s(x))=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\epsilon_i|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\epsilon_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^2.$$

Donc, Σ est l'ensemble d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^2=1$ dans la base $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$. Puisque $\lambda_1>0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\epsilon_1$ est défini et appartient à Σ. En particulier, Σ n'est pas vide. Soit $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\epsilon_i\in\Sigma$. Puisque $0<\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$,

$$1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^2\geqslant\lambda_1\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\lambda_1\|x\|_2^2,$$

et donc $\|x\|_2\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$. Ainsi, $\forall x\in\Sigma$, $\|x\|_2\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et donc Σ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Soient $\begin{array}{cccc}g: & \mathbb{R}^n & \to & (\mathbb{R}^n)^2\\ & x & \mapsto & (x,s(x))\end{array}$ et $\begin{array}{cccc}h: & (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}\\ & (x,y) & \mapsto & (x|y)\end{array}$. g est une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\dim(\mathbb{R}^n)<+\infty$. Donc, g est continue sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, on sait que l'application h est continue sur $(\mathbb{R}^n)^2$. Donc, l'application $f=h\circ g\ :\ x\,(x|s(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

$\Sigma=f^{-1}\{1\}$ et le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donc, Σ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue sur $\mathbb{R}^n$.

En résumé, Σ est une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^n)<+\infty$, le théorème de Borel-Lebesgue permet d'affirmer que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2. **I.2.2.1** Si $\lambda_1\leqslant\ldots\lambda_n\leqslant 0$, alors pour tout $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\epsilon_i\in\mathbb{R}^n$, $(x|s(x))=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^2\leqslant 0$. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $(x|s(x))\neq 1$ et donc Σ est vide.

Par contraposition, si Σ n'est pas vide, alors $\lambda_n>0$.

I.2.2.2 Puisque $\lambda_1\leqslant 0$ et $\lambda_n>0$, pour tout réel r, la fraction $\dfrac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n}$ existe et est positive puis x_r existe. Soit $r\in\mathbb{R}$.

$$(x_r|s(x_r))=\lambda_1 r^2+\lambda_n\left(\sqrt{\frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n}}\right)^2=\lambda_1 r^2+\lambda_n\frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n}=1.$$

Donc, $x_r \in \Sigma$. Ensuite, puisque la base $(\epsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormée,

$$\|x_r\|^2 = r^2 + \left(\sqrt{\frac{1-\lambda_1 r^2}{\lambda_n}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_n}((\lambda_n - \lambda_1)r^2 + 1).$$

Puisque $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n - \lambda_1 > 0$, on a $\lim\limits_{r\to+\infty} \|x_r\|^2 = +\infty$. On en déduit que Σ n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et en particulier, Σ n'est pas une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Par contraposition, si Σ est compacte, alors $\lambda_1 > 0$. Finalement, Dans la question I.2, on a montré que Σ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\lambda_1 > 0$.

Partie II. Racine carrée d'une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$

II.1. II.1.1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_i. Alors,

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda_i X) = \lambda_i \|X\|_2^2,$$

et donc, puisque $\|X\|_2^2 > 0$ et que ${}^tXSX \geqslant 0$, on a $\lambda_i = \dfrac{{}^tXSX}{\|X\|_2^2} \geqslant 0$. On a montré que si S est symétrique positive alors ses valeurs propres sont des réels positifs.

II.1.2. Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i X_i \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXSX = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0.$$

et donc, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geqslant 0$ ou encore $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a montré que si S est symétrique à valeurs propres positives, S est symétrique positive.

II.1.3. Puisque 0 n'est pas valeur propre de S, S est inversible. Ensuite, S^{-1} est symétrique car ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$. Enfin, $\mathrm{Sp}(S^{-1}) = \left(\dfrac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et donc les valeurs propres de S^{-1} sont des réels strictement positifs. On en déduit que $S^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2. II.2.1. $\Delta^2 = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = D$.

Ensuite, pour tout $i \in [\![1, n]\!]^2$, $\mu^2 y_i = (N^2 y)_i = (DY)_i = \lambda_i y_i$. Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mu^2 y_i = \lambda_i y_i &\Rightarrow \mu^2 y_i^2 = \lambda_i y_i^2 \Rightarrow \sqrt{\mu^2 y_i^2} = \sqrt{\lambda_i y_i^2} \Rightarrow \mu|y_i| = \sqrt{\lambda_i}|y_i| \text{ (car } \mu \geqslant 0)\\
&\Rightarrow \mu \text{ sgn}(y_i)|y_i| = \sqrt{\lambda_i}\text{sgn}(y_i)|y_i| \text{où sgn}(y_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } y_i > 0 \\ 0 \text{ si } y_i = 0 \\ -1 \text{ si} y_i < 0 \end{cases} \text{ de sorte que } y_i = \text{sgn}(y_i)|y_i|)\\
&\Rightarrow \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i.
\end{aligned}$$

En résumé, si μ est un réel positif et Y un élément de $\mathrm{Ker}(N - \mu I_n)$, alors $NY = (\mu y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(\sqrt{\lambda_i} y_i\right) = \Delta Y$.

Maintenant, puisque $N \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, les valeurs propres de N sont des réels positifs $\mu_1, \ldots, \mu_n$ et il existe $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de N. D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $NY_i = \Delta Y_i$. Puisque $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que $N = \Delta$. On a montré que D admet une racine carrée et une seule dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ à savoir la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

II.2.2. Soit $T = U\Delta{}^tU$. Alors, ${}^tT = {}^t({}^tU){}^t\Delta{}^tU = U\Delta{}^tU = T$ et donc $T \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{Sp}(T) = \left(\sqrt{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \subset (\mathbb{R}^+)^n$ et donc $T \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin,

$$T^2 = U\Delta^2{}^tU = UD{}^tU = S.$$

Soit $T' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $T'^2 = S$. Alors, $({}^tUT'U)^2 = {}^tUT'^2U = {}^tUSU = D$ et d'autre part, ${}^tUT'U \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ car ${}^tUT'U$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs. D'après la question précédente, ${}^tUT'U = \Delta$ puis $T' = U\Delta{}^tU = T$. On a montré l'unicité de T.

II.3. II.3.1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$L_k(S)X_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{1}{\mu_k - \mu_i}(S - \mu_j I_n)X_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{\lambda_i - \mu_j}{\mu_k - \mu_i}\right) X_i = L_k(\lambda_i)X_i = \left\{\begin{array}{l} X_i \text{ si } \lambda_i = \mu_k \\ 0 \text{ si } \lambda_i \neq \mu_k \end{array}\right. .$$

II.3.2. Chaque L_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, est de degré $p-1$ et donc le polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_i} L_i$ est de degré au plus $p-1$. De plus, pour $k \in [\![1, p]\!]$,

$$P(\mu_k) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_i} L_i(\mu_k) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{i,k}\sqrt{\mu_i} = \sqrt{\mu_k}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $k_0 \in [\![1, p]\!]$ l'indice tel que $\mu_{k_0} = \lambda_i$. D'après la question II.3.1,

$$P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\mu_{k_0}} L_{k_0}(S)X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i.$$

Ainsi, $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $P(S)$. Plus précisément, si $U = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)$, U est une matrice orthogonale telle que ${}^tUP(S)U = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Ainsi, $P(S)$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale et donc $P(S)$ est une matrice symétrique. Les valeurs propres de $P(S)$ sont des réels positifs et donc $P(S) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin,

$$P(S) = U\Delta {}^tU = S.$$

II.3.3. La matrice S est symétrique. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_S = \begin{vmatrix} 7-X & 2 & -2 \\ 2 & 4-X & -1 \\ -2 & -1 & 4-X \end{vmatrix} &= (7-X)(X^2 - 8X + 15) - 2(-2X+6) - 2(-2X+6) \\ &= (7-X)(X-3)(X-5) - 4(X-3) = -(X-3)[(X-7)(X-5) - 8] = -(X-3)(X^2 - 12X + 27) \\ &= -(X-3)^2(X-9).\end{aligned}$$

On peut prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 9$. Puisque les valeurs propres de S sont des réels positifs, $S \in \mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$. Ensuite, $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 9$ et donc

$$P = \sqrt{3}\frac{X-9}{3-9} + 3\frac{X-3}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}X + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2},$$

puis

$$\boxed{\sqrt{S} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}S + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}I_3.}$$

Partie III. Une propriété de la trace des matrices de S_n^+

III.1. III.1.1. Puisque la matrice V est orthogonale, ses colonnes sont des vecteurs unitaires et en particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_{i,i} \leqslant 1$. Puisque les α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i v_{i,i} \leqslant \alpha_i$ puis

$$\text{tr}\,(\delta V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \text{tr}(\delta).$$

III.1.2. Posons $S = PD{}^tP$ où $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et $P \in O(n)$. Soit $U \in O(n)$.

$$\begin{aligned}\text{tr}(SU) &= \text{tr}(PD{}^tPU) = \text{tr}(D({}^tPUP)) \\ &\leqslant \text{tr}(D) \text{ (car } {}^tPUP \in O(n) \text{ puisque } (O(n), \times) \text{ est un groupe)} \\ &= \text{tr}({}^tPPD) = \text{tr}(PD{}^tP) = \text{tr}(S).\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\forall U \in O(n)$, $\text{tr}(SU) \leqslant \text{tr}(S)$.

III.2. **III.2.1.** Si $a = b = 0$, $\varphi = 0$ convient. Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$. Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Mais alors, pour tout réel θ,

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\theta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a fourni un réel φ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$.

En particulier, pour $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, on obtient $a\cos(\theta_0) + b\sin(\theta_0) = \sqrt{a^2+b^2}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \forall\theta \in \mathbb{R},\ a\cos\theta + b\sin\theta \leqslant a &\Rightarrow a\cos\theta_0 + b\sin\theta_0 \leqslant a \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leqslant a \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 \leqslant a^2 \Rightarrow b^2 \leqslant 0 \\ &\Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

III.2.2. En notant $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $U = \displaystyle\sum_{i\notin\{p,q\}} E_{i,i} + \cos\theta(E_{p,p} + E_{q,q}) + \sin\theta(E_{q,p} - E_{p,q})$.

On sait que pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,({}^tAB) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$ et en particulier, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ puis par linéarité de la trace

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AU) &= \sum_{i\notin\{p,q\}} \mathrm{tr}\,(AE_{i,i}) + \cos\theta\,(\mathrm{tr}\,(AE_{p,p}) + \mathrm{tr}\,(AE_{q,q}))) + \sin\theta\,(\mathrm{tr}\,(AE_{q,p}) - \mathrm{tr}\,(AE_{p,q})) \\ &= \sum_{i\notin\{p,q\}} a_{i,i} + \cos\theta(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p}). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$ et donc $\cos\theta(a_{p,p} + a_{q,q}) + \sin\theta(a_{p,q} - a_{q,p}) \leqslant a_{p,p} + a_{q,q}$. Cette inégalité est vraie pour tout réel θ et donc, d'après le lemme technique de la question précédente $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$.

Ainsi, pour tout $(p, q) \in [\![1, n]\!]$, $a_{p,q} = a_{q,p}$ et donc $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

III.2.3. La matrice de l dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$ est $\mathrm{diag}(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et la matrice de u dans cette même base est $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ puis

$$\mathrm{tr}(AU) = -\beta_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i = \mathrm{tr}(A) - 2\beta_1,$$

L'inégalité $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$ impose $\mathrm{tr}(A) - 2\beta_1 \leqslant \mathrm{tr}(A)$ puis $\beta_1 \geqslant 0$ ce qui est une une contradiction. Il ést donc absurde de supposer que la matrice A a une valeur propre strictement négative et finalement $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'après la question II.1.2.

Partie IV. Une propriété de la trace des matrices de S_n^+

IV.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On sait que s et t sont auto-adjoints (car la base $\mathcal{B}$ est orthonormale), que s^{-1} et t^{-1} sont auto-adjoints, que $t^2 = s$ et $t^{-2} = s^{-1}$. Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(t(x)|t^{-1}(x)\right)^2 \leqslant (t(x)|t(x))\left(t^{-1}(x)|t^{-1}(x)\right) = \left(t^2(x)|x\right)\left(x|t^{-2}(x)\right) = (s(x)|x)\left(x|s^{-1}(x)\right).$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si la famille $\left(t(x), t^{-1}(x)\right)$ est liée. Puisque t et t^{-1} sont des automorphismes, pour tout $x \neq 0$, on a $t(x) \neq 0$ puis

$$\begin{aligned} \left(t(x), t^{-1}(x)\right) \text{ liée} &\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ t^{-1}(x) = kt(x) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ t^2(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}/\ s(x) = \lambda x \\ &\quad x \text{ est vecteur propre de } s. \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(t(x)|t^{-1}(x)\right)^2 = (s(x)|x)\left(x|s^{-1}(x)\right)$ si et seulement si x est nul ou vecteur propre de s.

IV.2. $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_n)$. Donc P est positif sur $]-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_n, +\infty[$ et négatif sur $[\lambda_1, \lambda_n]$. Puisque les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n]$, sont dans $[\lambda_1, \lambda_n]$, on en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) \leqslant 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$ et $s(x) = \lambda_i x$. Tout d'abord $s(x) = \lambda_i x \Rightarrow s^{-1}(s(x)) = \lambda_i s^{-1}(x) \Rightarrow s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i} x$ et aussi $s^2(x) = \lambda s(x) = \lambda^2 x$ puis

$$v(x) = -\left(s^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)s + \lambda_1\lambda_n \mathrm{Id}\right)\left(\frac{1}{\lambda_i} x\right) = -\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} x.$$

Puisque x n'est pas nul, x est un vecteur propre de v associé à la valeur propre $-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}$.

Soit $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alosr, la matrice de v dans $\mathscr{B}'$ est $\operatorname{diag}\left(-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ou encore la matrice V est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs (d'après le début de la question). On en déduit que $V \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

IV.3. • $Q(0) = \left(s^{-1}(x)|x\right)\lambda_1\lambda_n > 0$ car $\lambda_1 > 0$, $\lambda_n > 0$ et $\left(s^{-1}(x)|x\right)$ car $x \neq 0$ et s^{-1} est défini positif.

D'autre part, $Q(1) = (s(x)|x) - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 + \left(s^{-1}(x)|x\right)\lambda_1\lambda_n = \left(\left(s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + s^{-1}(x)\right)\|x\right) = -(v(x)|x)$. Comme v est défini positif et $x \neq 0$, $(v(x)|x) > 0$ puis $Q(1) < 0$.

• Puisque $(s(x)|x) > 0$, Q est un polynôme du second degré. Puisque Q prend une valeur strictement positive et une valeur strictement négative, on sait que le discriminant de Q est négatif ou nul ce qui fournit $(\lambda_1 + \lambda_n)^2\|x\|^4 - 4\lambda_1\lambda_n(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) \leqslant 0$ ou encore, puisque $4\lambda_1\lambda_n > 0$,

$$(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4.$$

IV.4. Puisque s est symétrique et que les vecteurs v_1 et v_n sont associés à des valeurs propres distinctes, on sait que v_1 et v_n sont orthogonaux. Plus précisément, la famille (v_1, v_n) est orthonormale. On en déduit que

$$(s(x)|x) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n | v_1 + v_n) = \lambda_1 + \lambda_n \text{ et } \left(s^{-1}(x)|x\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}v_1 + \frac{1}{\lambda_n}v_n \middle| v_1 + v_n\right) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n},$$

puis

$$(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) = (\lambda_1 + \lambda_n)\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n}\right) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}.$$

D'autre part, $\|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et donc

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n} = (s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right).$$

Le vecteur x vérifie donc l'égalité dans l'inégalité (2).

