SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I

I.1. I.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^2 + n^2\pi^2 \neq 0$ et donc $u_n(x)$ existe puis $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{n^2\pi^2} > 0$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{2x}{n^2\pi^2}$ converge, il en est de même de la série numérique de terme général $u_n(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge ou encore

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

I.1.2. Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[-a, a]$

$$|u_n(x)| = \frac{2|x|}{x^2 + n^2\pi^2} \leqslant \frac{2a}{n^2\pi^2},$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|u_n(x)|,\ x \in [-a, a]\} \leqslant \dfrac{2a}{n^2\pi^2}$ et puisque la série numérique de terme général $\dfrac{2a}{n^2\pi^2}$ converge,

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } u_n \text{ converge normalement sur } [-a, a].}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|u_n(x)|,\ x \in \mathbb{R}\} \geqslant |u_n(n)| = \dfrac{2}{(1+\pi^2)n}$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{2}{(1+\pi^2)n}$ diverge, la série de fonctions de terme général u_n ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

I.1.3. Soit $a > 0$. Chaque fonction u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[-a, a]$. De plus, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément vers U sur $[-a, a]$. Par suite, la fonction U est continue sur $[-a, a]$ et ceci pour tout réel strictement positif a. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } U \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

I.2. I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \frac{2t}{t^2 + n^2\pi^2}\,dt = \left[\ln\left(t^2 + n^2\pi^2\right)\right]_0^x = \ln\left(\frac{x^2 + n^2\pi^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

I.2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2} > 0$ et donc $v_n(x)$ existe. De plus, $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n^2\pi^2} > 0$. Comme la série numérique de terme général $\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en est de même de la série de terme général $v_n(x)$. On a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } v_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

I.2.3. Soit $a > 0$.

- La série de fonctions de terme général v_n converge simplement vers la fonction V sur $[-a, a]$ d'après la question I.2.2.
- Chaque fonction v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est dérivable sur $[-a, a]$ et $v_n' = u_n$ d'après la question I.2.1.
- La série de fonctions de terme général $v_n' = u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[-a, a]$ d'après la question I.1.2.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction V est dérivable sur $[-a, a]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, la fonction V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $V' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = U$.

Enfin, $V(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = 0$.

I.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $p_n(x) = x \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right) = x \exp\left(\sum_{k=1}^{n} v_n(x)\right)$. Quand n tend vers $+\infty$, cette expression tend vers $xe^{V(x)}$ ou encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = x \exp\left(\int_0^x U(t)\ dt\right).}$$

Partie II

II.1. II.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, par 2π-périodicité, $g_x(-\pi) = g_x(\pi) = \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x(-\pi)}{\pi}\right)$.
Donc pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $g_x(t) = \operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right)$. Mais alors, g_x est continue sur $[-\pi, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. De même, g_x est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et donc de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_x est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g_x converge vers g_x sur $\mathbb{R}$.

II.1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $g(-t) = g(t)$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi \leqslant t - 2k\pi \leqslant \pi$. Mais alors, $-t + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ puis

$$g_x(-t) = g_x(-t + 2k\pi) = g_x(t - 2k\pi) = g_x(t).$$

La fonction g_x est donc paire. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(x) = 0$.

II.1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, $a_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dt = 2$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt)\ dt = 0$.
- Si $x \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right)\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\pi}{x}\operatorname{sh}\left(\frac{xt}{\pi}\right)\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{n\pi}{x}\int_0^{\pi} \operatorname{sh}\left(\frac{xt}{\pi}\right)\sin(nt)\ dt\right) \\
&= \frac{2(-1)^n \operatorname{sh} x}{x} + \frac{2n}{x}\left(\left[\frac{\pi}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right)\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{n\pi}{x}\int_0^{\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right)\cos(nt)\ dt\right) \\
&= \frac{2(-1)^n \operatorname{sh} x}{x} - \frac{2n^2\pi}{x^2} \times \frac{\pi}{2}a_n(x) = \frac{2(-1)^n \operatorname{sh} x}{x} - \frac{n^2\pi^2}{x^2}a_n(x).
\end{aligned}$$

Par suite, $a_n(x) = \dfrac{2(-1)^n \operatorname{sh} x}{x\left(1 + \frac{n^2\pi^2}{x^2}\right)} = \dfrac{2(-1)^n x \operatorname{sh} x}{x^2 + n^2\pi^2} = (-1)^n \operatorname{sh} x\, u_n(x)$.

II.2. II.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après la question II.1, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\operatorname{ch}\left(\frac{xt}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sh} x\, u_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sh} x\, u_n(x)\cos(nt).$$

Pour $t = \pi$, on a en particulier $\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} x}{x} + \operatorname{sh} x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x} + \operatorname{sh} x\, U(x)$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ U(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}.}$$

II.2.2. On rappelle que d'après la question I.1.3, la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$. On sait déjà que $V(0) = 0$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
V(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{x}\left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} - \frac{1}{t}\right) dt = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\ln(\operatorname{sh} t) - \ln(t)\right]_{\varepsilon}^{x} = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) - \lim_{\varepsilon \to 0}\ln\left(\frac{\operatorname{sh} \varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction U est impaire et donc la fonction V est paire. Par suite, si $x < 0$, $V(x) = V(-x) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \ln\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.}$$

II.2.3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après la question I.3, $x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = p(x) = xe^{V(x)} = \operatorname{sh} x$. Ces égalités restant vraies quand $x = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh} x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).}$$

Partie III

III.1. **III.1.1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$h(x,t) = \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} = \frac{tx + o(t)}{\pi t + o(t)} = \frac{x}{\pi} + o(1).$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ tend vers $\dfrac{x}{\pi}$ quand t tend vers 0.

III.1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t > 0$, $e^{\pi t} - 1 > 0$. Donc la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
La fonction $t \mapsto h(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 d'après la question précédente et donc la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur un voisinage de 0.
Pour tout réel $t > 0$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{e^{\pi t} - 1}$ et en particulier, $h(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.2. **III.2.1.** h possède sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ des dérivées partielles par rapport à sa première variable x à tout ordre en tant que quotient de fonctions admettant sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ des dérivées partielles à tout ordre par rapport à la première variable x et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = \frac{t^n \sin\left(xt + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t} - 1}.$$

Plus précisément, pour $m \in \mathbb{N}$ et $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

- $\dfrac{\partial^{2m} h}{\partial x^{2m}}(x,t) = \dfrac{t^{2m}\sin(xt + m\pi)}{e^{\pi t} - 1} = \dfrac{(-1)^m t^{2m}\sin(xt)}{e^{\pi t} - 1}$.
- $\dfrac{\partial^{2m+1} h}{\partial x^{2m+1}}(x,t) = \dfrac{t^{2m+1}\sin\left(xt + m\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)}{e^{\pi t} - 1} = \dfrac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(xt)}{e^{\pi t} - 1}$.

III.2.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{t^n \sin\left(xt + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t} - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

• Quand t tend vers 0, $\dfrac{t^n}{e^{\pi t} - 1} \sim \dfrac{t^n}{\pi t} = \dfrac{t^{n-1}}{\pi}$ et donc $\dfrac{t^n \sin\left(xt + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t} - 1} = O\left(\dfrac{t^{n-1}}{\pi}\right)$.

En particulier, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est bornée sur un voisinage de 0 et donc est intégrable sur un voisinage de 0.

• $\left|t^2\dfrac{t^n\sin\left(xt+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t}-1}\right| \leqslant \dfrac{t^{n+2}}{e^{\pi t}-1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\dfrac{t^n\sin\left(xt+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t}-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par suite, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.3. • Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
• La fonction h admet sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ des dérivées partielles par rapport à la première variable x à tout ordre et pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)=\frac{t^n\sin\left(xt+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t}-1}.$$

- pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $t\in]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right|=\frac{t^n\left|\sin\left(xt+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right|}{e^{\pi t}-1}\leqslant\frac{t^n}{e^{\pi t}-1}=\varphi_n(t).$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (car $\varphi_n(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{t^{n-1}}{\pi}$ avec $n-1\geqslant 0$) et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.
Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^n\sin\left(xt+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{e^{\pi t}-1}\,dt.$$

Plus précisément, pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f^{(2m)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}\sin(xt)}{e^{\pi t}-1}\,dt \text{ et } f^{(2m+1)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(xt)}{e^{\pi t}-1}\,dt.$$

III.4. **III.4.1.** Soit $t>0$. Alors $0<e^{-\pi t}<1$ et donc la série géométrique de terme général $(e^{-\pi t})^n$ converge. Par suite,

$$\frac{1}{e^{\pi t}-1}=e^{-\pi t}\times\frac{1}{1-e^{-\pi t}}=e^{-\pi t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-\pi t})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\pi(n+1)t}=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n\pi t}$$

III.4.2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto e^{-n\pi t}\sin(xt)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ (car $n>0$). Donc la fonction $t\mapsto e^{-n\pi t}\sin(xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}e^{-n\pi t}\sin(xt)\,dt &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-n\pi t}\times e^{ixt}\,dt\right)=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-n\pi+ix)t}\,dt\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-n\pi+ix)t}}{-n\pi+ix}\right]_0^{+\infty}\right)\ (\mathrm{Re}(-n\pi+ix)=-n\pi\neq0 \text{ et donc } -n\pi+ix\neq0)\\
&=\mathrm{Im}\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{(-n\pi+ix)t}}{-n\pi+ix}\right)-\frac{1}{-n\pi+ix}\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{n\pi-ix}\right)\ \left(\text{car } \left|\frac{e^{(-n\pi+ix)t}}{-n\pi+ix}\right|=\frac{e^{-n\pi t}}{|-n\pi+ix|}\underset{t\to+\infty}{\to}0\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{n\pi+ix}{n^2\pi^2+x^2}\right)=\frac{x}{x^2+n^2\pi^2}\\
&=\frac{u_n(x)}{2}.
\end{aligned}$$

III.4.3. Soient $x \in \mathbb{R}$, $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$h_n(x,t) = \sin(xt)\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\pi t}\right)^k = \sin(xt)e^{-\pi t}\frac{1-e^{-n\pi t}}{1-e^{-\pi t}} = (1-e^{-n\pi t})\frac{\sin(xt)}{e^{\pi t}-1}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto h_n(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$f(x) - \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{e^{\pi t}-1}\,dt - \int_0^{+\infty}(1-e^{-n\pi t})\frac{\sin(xt)}{e^{\pi t}-1}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)e^{-n\pi t}}{e^{\pi t}-1}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-n\pi t}h(x,t)\,dt.$$

La fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet des limites réelles en 0 et $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de la fonction $t \mapsto |h(x,t)|$ sur $]0,+\infty[$. Alors

$$\left|f(x) - \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(xt)}{e^{\pi t}-1}\right| e^{-n\pi t}\,dt \leqslant M\int_0^{+\infty} e^{-n\pi t}\,dt = \frac{M}{n\pi}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M}{n\pi} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = f(x)$. Maintenant, d'après la question III.4.2, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} e^{-k\pi t}\sin(xt)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = \frac{1}{2}U(x)$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{U(x)}{2}.}$$

