SESSION 2011

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE 1

1. Pour $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ et pour $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n^2-1}{(n+1)^2-1}$.
Par suite, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$. D'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.

$$\boxed{R = 1.}$$

2. Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} \text{ (puisque } |x|<1, \text{ les deux séries convergent)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$xS(x) = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + x + \frac{x^2}{2} = (1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}.$$

Donc si $x \neq 0$, $S(x) = \dfrac{(1-x^2)\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2}}{x}$ et d'autre part, $S(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{(1-x^2)\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2}}{x} \text{ si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \end{array}\right..}$$

3. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $(1-x^2)\ln(1-x) = (1+x)(1-x)\ln(1-x) \to 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = \frac{0+1+\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = \frac{3}{2}.}$$

Remarque. Pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geqslant 2$, $|a_n x^n| \leqslant \dfrac{2}{n^2-1}$. Comme $\dfrac{2}{n^2-1}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n x^n$, $n \geqslant 2$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction S sur $[-1,1]$. Puisque chacune de ces fonctions est continue sur $[-1,1]$, la somme S est une fonction définie et continue sur $[-1,1]$ et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = S(1) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1} = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1. Sur $]0,+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Les deux fonctions $x \mapsto -\dfrac{3}{2x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Donc les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x>0,\ e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\ln(x)}}{2\sqrt{x}}\\
&\Leftrightarrow \forall x>0\ \left(\left(\frac{f}{x^{3/2}}\right)'(x) = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ \frac{f(x)}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2x} + C\right.\\
&\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $]0,+\infty[$. Nécessairement, $f(0) = 0$ (fourni par (E)) et $\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}$. En résumé, nécessairement, $\exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\geqslant 0,\ f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + Cx\sqrt{x}$.

Soient $C\in\mathbb{R}$ puis f une fonction du type précédent. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ et donc f n'est pas dérivable en 0. Ainsi, aucune des fonctions précédentes n'est dérivable en 0 et donc aucune des fonctions précédentes ne peut être solution de (E) sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,+\infty[} = \varnothing.}$$

Problème
AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. Question préliminaire

(a) Si la fonction f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et positive sur $[a,+\infty[$, on sait que

$$f \text{ est intégrable sur } [a,+\infty[\text{ si et seulement si la fonction } F \text{ a une limite réelle en } +\infty.$$

(b) Si la fonction f n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty[$, on sait que

$$\text{si } f \text{ est intégrable sur } [a,+\infty[\text{ alors la fonction } F \text{ a une limite réelle en } +\infty,$$

mais l'implication contraire est fausse.

Partie I : Exemples et propriétés

2. (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

• La fonction nulle est dans E.
• Soient $(f,g)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Tout d'abord, la fonction $\lambda f+\mu g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Ensuite, pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto(\lambda f(t)+\mu g(t))e^{-xt} = \lambda f(t)e^{-xt}+\mu g(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Finalement, la fonction $\lambda f+\mu g$ est dans E.

On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}).}$$

(b) • La fonction nulle est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ et donc $0\in F$.
• Soit $f\in F$. f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x>0$, $f(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-xt}\right) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\forall x>0$, la fonction $t\mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En résumé, $f\in F$. On a montré que $F\subset E$.

• Soient $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part, si M_1 et M_2 désignent des majorants de $|f|$ et $|g|$ respectivement sur $\mathbb{R}^+$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda f(t) + \mu g(t)| \leqslant |\lambda| M_1 + |\mu| M_2$. Donc la fonction $\lambda f + \mu g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et finalement $\lambda f + \mu g$ est dans F.

On a montré que

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

(c) Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt}\, dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\, dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\, dt = (\lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g))(x).$$

Donc, $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$. On a montré que

$$\boxed{\mathcal{L} \in \mathscr{L}(E, \mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})).}$$

3. (a) Puisque $\mathcal{U}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{U} \in F$. Soit $x > 0$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x} \text{ (car } x > 0).$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}.}$$

(b) Soit $\lambda \geqslant 0$. Puisque h_λ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, $h_\lambda \in F$. Soit $x > 0$.

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+x)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-(\lambda+x)t}}{\lambda + x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{\lambda + x} \text{ (car } \lambda + x > 0).$$

$$\boxed{\forall \lambda \geqslant 0,\ \forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda + x}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x > 0$. $t^n e^{-xt} \times e^{\frac{xt}{2}} = t^n e^{-\frac{xt}{2}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $t^n e^{-xt} \times e^{\frac{xt}{2}} \leqslant 1$.
Pour $t \geqslant A$, on a $|g_n(t)e^{-xt}| = |f(t)| t^n e^{-xt} \leqslant |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}}$. Comme la fonction f est dans E et que $\frac{x}{2} > 0$, la fonction $t \mapsto |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et il en est de même de la fonction $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$.
Ainsi, $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et finalement $g_n \in E$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g_n \in E.}$$

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ car la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x > 0$.
Soit $A > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto -e^{-xt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$x \int_0^A f(t)e^{-xt}\, dt = \left[-f(t)e^{-xt}\right]_0^A + \int_0^A f'(t)e^{-xt}\, dt = f(0) - f(A)e^{-xA} + \int_0^A f'(t)e^{-xt}\, dt.$$

La fonction f est dans E et donc la fonction $A \mapsto x \int_0^A f(t)e^{-xt}\, dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ à savoir $x\mathcal{L}(f)(x)$. Ensuite, puisque f est bornée, $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)e^{-xA} = 0$.

Puisque $\forall A > 0$, $\int_0^A f'(t)e^{-xt}\, dt = x \int_0^A f(t)e^{-xt}\, dt - f(0) + f(A)e^{-xA}$, la fonction $A \mapsto x \int_0^A f'(t)e^{-xt}\, dt$ a une limite réelle quand A tend vers $+\infty$ à savoir $x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Puisque la fonction f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que la fonction $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc que $f' \in E$ puis que $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Soit $f \in E$. Soit $a > 0$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-xt} \end{array}$.

• Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt} = -g_1(t)e^{-xt}.$$

- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $g_1 \in E$).
- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = |g_1(t)|e^{-xt} \leqslant |g_1(t)|e^{-at} = \varphi_1(t)$ où la fonction φ_1 est une fonction continue par morceaux, positive, indépendante de x et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $g_1 \in E$).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, on a montré que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(f(t)e^{-xt})\,dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,dt = -\mathcal{L}(g_1)(x).$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(f) \in C^n(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$.

• C'est vrai pour $n = 1$ d'après la question précédente.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\mathcal{L}(f) \in C^n(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et que $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$.
La fonction g_n est dans E d'après la question 4. D'après la question 6.a), la fonction $(-1)^n\mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ou encore la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0,+\infty[$. De plus, $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = (-1)^n(\mathcal{L}(g_n))' = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(tg_n) = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_{n+1})$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall f \in E,\ f \in C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n).}$$

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. (a) f est dans F et donc f est continue et bornée sur $[0,+\infty[$. Soit $x > 0$.

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\,dt \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{\|f\|_\infty}{x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{x} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall f \in F,\ \lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0.}$$

(b) *Théorème de la valeur initiale*

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, croissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$. D'après la question la question 5, $\forall x > 0$, $x\mathcal{L}(f)(x) = f(0) + \mathcal{L}(f')(x)$. Puisque f' est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, la question précédente permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).}$$

8. Théorème de la valeur finale

(a) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|f(t) - \ell| \leqslant 1$. Pour $t \geqslant A$, on a alors $|f(t)| \leqslant |f(t) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$.
D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc f est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0,A]$.

Ainsi, pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, on a $|f(t)| \leqslant \text{Max}\{M, 1 + |\ell|\}$ et on a montré que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Finalement, $f \in F$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a_n > 0$, en posant $x = a_n t$, on obtient

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-a_n t}\, dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a_n}\right) e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt.$$

(c) • Chaque fonction h_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour chaque $x \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = \ell e^{-x}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{a_n} = +\infty$. Donc, la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $h\ :\ x \mapsto \ell e^{-x}$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $|h_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-x} = \varphi(x)$ (hypothèse de domination) où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx\right)$ converge vers

$$\int_0^{+\infty} h(x)\, dx = \ell \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \ell.$$

On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell.}$$

(d) Ainsi, pour toute suite (a_n) de réels strictement positifs, convergente et de limite nulle, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$. Montrons alors que $\lim\limits_{x \to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Supposons par l'absurde que $x\mathcal{L}(f)(x)$ ne tende pas vers 0 quand x trend vers 0.

Alors $\exists \varepsilon > 0 /\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in]0, \alpha[/\ |x\mathcal{L}(f)(x) - \ell| \geqslant \varepsilon$. ε est dorénavant ainsi fixé.

Ce qui précède permet en particulier d'affirmer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \left]0, \dfrac{1}{n+1}\right[$ tel que $|a_n \mathcal{L}(f)(a_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$. Mais alors, la suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle que la suite $(a_n \mathcal{L}(f)(a_n))$ ne tende pas vers ℓ ce qui est absurde. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ou encore, puisque $\ell \neq 0$,

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\ell}{x}.}$$

9. **(a)** La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on peut donc écrire $R(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt$.

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée la fonction f. Par suite, la fonction R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $R' = -f$.

La fonction R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier est continue sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part, puisque la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = 0$. Donc, La fonction R est dans F d'après la question 8.a).

Maintenant, la fonction R n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^+$ et on ne peut donc pas appliquer la question 5. On démontre le résultat de l'énoncé grâce à une intégration par parties. Soit $x > 0$. Alors $x\mathcal{L}(R)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t) x e^{-xt}\, dt$.

Soit X un réel strictement positif. Les deux fonctions $t \mapsto R(t)$ et $t \mapsto -e^{-xt}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^X R(t) x e^{-xt}\, dt = \left[-R(t) e^{-xt}\right]_0^X - \int_0^X f(t) e^{-xt}\, dt = R(0) - R(X) e^{-xX} - \int_0^X f(t) e^{-xt}\, dt.$$

Quand X tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^X R(t) x e^{-xt}\, dt$ tend vers $x\mathcal{L}(R)(x)$ puis $R(X)e^{-xX}$ tend vers 0 car la fonction R est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et enfin $\displaystyle\int_0^X f(t) e^{-xt}\, dt$ tend vers $\mathcal{L}(f)(x)$. On a donc montré que $\forall x > 0$, $x\mathcal{L}(R)(x) = R(0) - \mathcal{L}(f)(x)$ ou encore

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| = |-x\mathcal{L}(R)(x)| &= x\left|\int_0^A R(t)e^{-xt}\,dt + \int_A^{+\infty} R(t)e^{-xt}\,dt\right| \\
&\leqslant x\left(\int_0^A |R(t)|e^{-xt}\,dt + \int_A^{+\infty} |R(t)|e^{-xt}\,dt\right) \leqslant x\left(\int_0^A |R(t)|\,dt + \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}\,dt\right) \\
&= x\int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon x\left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_A^{+\infty} = x\int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon e^{-xA} \\
&\leqslant x\int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) Ainsi, pour tout $x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon$ (où A ne dépend que de ε et ne dépend donc pas de x). Maintenant, $\lim\limits_{x\to 0} x\int_0^A |R(t)|\,dt = 0$ et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0,\alpha[$, $x\int_0^A |R(t)|\,dt < \varepsilon$. Pour $x \in]0,\alpha[$, on a $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0/\ \forall x \in]0,\alpha[$, $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| < 2\varepsilon$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.}$$

On peut donc prolonger $\mathcal{L}(f)$ par continuité en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Partie III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ puis sur $[0,+\infty[$ car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Donc la fonction F est définie sur $[0,+\infty[$.

Soient a et x deux réels tels que $0 < a < x$. Les deux fonctions $t \mapsto 1 - \cos t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{\sin t}{t}\,dt &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \\
&= \frac{1-\cos x}{x} - \frac{1-\cos a}{a} + \int_a^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \quad (*)
\end{aligned}$$

Quand a tend vers 0, $\frac{1-\cos a}{a} \sim \frac{a^2/2}{a} = \frac{a}{2}$ et donc $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1-\cos a}{a} = 0$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,x]$ et se prolonge par continuité en 0 (car $\frac{1-\cos t}{t^2}$ tend vers 0 quand t tend vers $\frac{1}{2}$).

Quand a tend vers 0 dans $(*)$, on obtient

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Pour tout $x > 0$, $\left|\frac{1-\cos x}{x}\right| \leqslant \frac{2}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, (prolongeable par continuité en 0) et dominée en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et en particulier, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

On en déduit que la fonction F a une limite réelle en $+\infty$ que l'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et de plus $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\,dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geqslant \int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{(n+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geqslant \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}}.$$

La série numérique de terme général $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}}$ diverge et donc la série numérique de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\,dt$ diverge. On sait alors que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

(c) Soient $x > 0$ et $X > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^X (\sin t)e^{-xt}\,dt &= \operatorname{Im}\left(\int_0^X e^{it}e^{-xt}\,dt\right) = \operatorname{Im}\left(\int_0^X e^{(-x+i)t}\,dt\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^X\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(-x+i)X}-1}{-x+i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(e^{-xX}\cos X - 1 + ie^{-xX}\sin X)(-x-i)}{x^2+1}\right) \\
&= -\frac{1}{1+x^2}(e^{-xX}(x\sin X + \cos X) - 1).
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $|t^2(\sin t)e^{-xt}| \leqslant t^2e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et donc $(\sin t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc la fonction $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est intégrablee sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $|e^{-xX}(x\sin X + \cos X)| \leqslant (x+1)e^{-xX} \underset{X\to+\infty}{\to} 0$. Par suite,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}\,dt = \frac{1}{1+x^2}.}$$

(d) Ainsi, pour tout $x > 0$, avec les notations de la question 4, $\mathcal{L}(g_1)(x) = \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$.
La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et admet une limite réelle en $+\infty$. D'après la question 8.a), $f \in F$ puis d'après la question 2.a), $f \in E$. D'après la question 6.a), la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\mathcal{L}(g_1)(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

et donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)(x) = C - \operatorname{Arctan} x$.

Puisque $f \in F$, la question 7.a) permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Par suite,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = R(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

