SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Partie I : Étude de la fonction φ

I.1/ Étude des fonctions d et δ

I.1.1/ La fonction d est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $t \in [0,+\infty[$, $d'(t) = 1-\sin t$. La fonction d' est positive sur $[0,+\infty[$ et donc la fonction d est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que pour $t > 0$, $d(t) \geqslant d(0) = 0$ puis que $1-\cos t \leqslant t$ et enfin que $\dfrac{1-\cos t}{t} \leqslant 1$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $\dfrac{1-\cos t}{t} \geqslant 0$ et finalement

$$\boxed{\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{1-\cos t}{t} \leqslant 1.}$$

I.1.2/ La fonction δ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $t \in [0,+\infty[$, $\delta'(t) = t-\sin t$. Il est connu que pour $t \geqslant 0$, $\sin t \leqslant t$. On en déduit que la fonction δ' est positive sur $[0,+\infty[$ puis que la fonction δ est croissante sur $[0,+\infty[$. Par suite, pour $t > 0$, $\delta(t) \geqslant \delta(0) = 0$ et donc $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \geqslant 0$ et finalement

$$\boxed{\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \frac{1}{2}.}$$

I.2/ Éxistence de la fonction φ sur $[0,+\infty[$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (par $\dfrac{1}{2}$) et dominée en $+\infty$ par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit alors $x \in [0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $t > 0$, $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$. Finalement

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ \varphi(x) \text{ existe.}}$$

I.3/ Limite de la fonction φ en $+\infty$[

I.3.1/ Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
Pour tout réel $t > 0$, $e^{-x_1 t} \geqslant e^{-x_2 t}$ et donc $\dfrac{1-\cos t}{t^2}(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

D'autre part, la fonction φ est positive sur $[0,+\infty[$. Ainsi, la fonction φ est décroissante et minorée par 0 sur $[0,+\infty[$. On en déduit que la fonction φ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et que cette limite est positive.

I.3.2/ Soit $x > 0$. D'après la question I.1.2/, pour tout $t > 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{2}$ et donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{2}\,dt = \frac{1}{2x}.$$

Comme $\dfrac{1}{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.}$$

I.4/ Caractère C^k de la fonction φ

I.4.1/ Soit $\Phi \; : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|\Phi(x,t)| = \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \varphi_0(t)$ où la fonction φ_0 est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question I.2/.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

I.4.2/ Soit $a > 0$.
• Pour chaque $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$. De plus,

- pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, d'après la question I.1.1/,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi_1(t).$$

où la fonction φ_1 est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), φ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et la dérivée de φ s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel strictement positif a,

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\,dt.}$$

I.4.3/ Soit $x > 0$. $|\varphi'(x)| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0.}$$

I.4.4/ Soit $a > 0$. En plus des résultats de la question I.4.2/, la fonction Φ admet une dérivée partielle seconde par rapport à sa première variable sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = (1)\cos t)e^{-xt}$. De plus,

- pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.
- pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \leqslant 2e^{-at} = \varphi_2(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, φ est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ et donc sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée seconde s'obtient par dérivation sous le signe somme.

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,dt.}$$

I.4.5/ Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Mais alors, la fonction $t \mapsto (\cos t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions intégrables sur $]0,+\infty[$.
On a déjà $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(\cos t)e^{-xt}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-x+i)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}-\frac{1}{-x+i}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right)\ \left(\text{car }\left|\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}}\underset{t\to+\infty}{\to}0\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi''(x) = \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.}$$

I.4.6/ Donc, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>0$, $\varphi'(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)+C$. De plus, d'après la question I.4.3/, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$ ce qui fournit $C=0$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1).}$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=-\infty$. Ainsi, φ est continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=-\infty$. On sait alors que φ n'est pas dérivable en 0.

I.5/ Expression explicite de la fonction φ

I.5.1/ $x\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-x\times\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{x}$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=0.}$$

I.5.2/ $\displaystyle\int\ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1)-\int x\frac{2x}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{Arctan}\,x+C.$

I.5.3/ D'après les questions I.4.6/ et I.5.2/, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x>0,\ \varphi(x)=(x\ln x-x)-\frac{1}{2}\left(x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{Arctan}\,x\right)+C=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)-\mathrm{Arctan}\,x+C.$$

D'après la question I.2/, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ et donc, d'après la question I.5.1/, $0=0-\dfrac{\pi}{2}+C$. Par suite, $C=\dfrac{\pi}{2}$ puis pour $x>0$,

$$\varphi(x)=x\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)-\mathrm{Arctan}\,x+\frac{\pi}{2}=x\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\,dt = x\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

I.5.4/ Puisque la fonction φ est continue en 0, quand x tend vers 0 on obtient $\varphi(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Etude de l'existence de J_m

II.1/ Étude de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$

Soit $m\in\mathbb{N}^*$. La fonction $t\mapsto\dfrac{(\sin t)^m}{t}$ est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

De plus $\dfrac{(\sin t)^m}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{m-1}$ et on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{(\sin t)^m}{t}$ se prolonge par continuité en 0 puis que la fonction $t \mapsto \dfrac{(\sin t)^m}{t}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul m, J_m existe.

II.2/ Étude de J_1

Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$. Les deux fonctions $t \mapsto 1 - \cos t$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^A + \int_a^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1-\cos a}{a} - \frac{1-\cos A}{A} + \int_a^A \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Or $\dfrac{1-\cos a}{a} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{a^2/2}{a} = \dfrac{a}{2}$ et donc $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1-\cos a}{a} = 0$. D'autre part, $\left|\dfrac{1-\cos A}{A}\right| \leqslant \dfrac{2}{A}$ et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1-\cos A}{A} = 0$. Quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$. On a montré que J_1 est une intégrale convergente et que

$$\boxed{J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.}$$

II.3/ Étude de l'existence de I_k

Si $k = 0$, $I_k = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = +\infty$.

Soit k un entier relatif non nul. Soit $A > \dfrac{\pi}{2}$. Une intégration par parties fournit

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\frac{\pi}{2}}^A + \frac{1}{ik}\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t^2}\,dt = \frac{1}{ik}\left(\frac{e^{ikA}}{A} - \frac{e^{ik\pi/2}}{\pi/2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t^2}\,dt\right).$$

Maintenant, $\left|\dfrac{e^{ikA}}{A}\right| = \dfrac{1}{A}$ et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{ik}\left(\dfrac{e^{ikA}}{A} - \dfrac{e^{ik\pi/2}}{\pi/2}\right) = -\dfrac{e^{ik\pi/2}}{ik\pi/2}$. Ensuite, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{ikt}}{t^2}$ est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et donc est intégrable sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$. En particulier, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{e^{ikt}}{t^2}\,dt$ existe dans $\mathbb{C}$. Finalement, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{e^{ikt}}{t}\,dt$ existe dans $\mathbb{C}$ ou encore I_k est une intégrale convergente.

$$\boxed{I_k \text{ est une intégrale convergente si et seulement si } k \in \mathbb{Z}^*.}$$

II.4/ Étude de la nature de J_m

II.4.1/ Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt &= \frac{1}{(2i)^m}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}e^{-i(m-k)t}}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} I_{2k-m}(x).
\end{aligned}$$

II.4.2/ Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $2k - (2p+1) \neq 0$ et donc chaque intégrale $I_{2k-(2p+1)}$ est une intégrale convergente d'après la question II.3/. Il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t}\,dt$. D'autre part, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t}\,dt$ est une intégrale convergente d'après la question II.1/. Finalement $J_{2p+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } J_{2p+1} \text{ existe.}}$$

II.4.3/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p} \binom{m}{k} I_{2k-2p}(x)$, un et un seul terme diverge quand x tend vers $+\infty$, le terme obtenu pour $k = p$. La somme est donc divergente quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale J_{2p} diverge. De plus, comme la fonction $t \mapsto \dfrac{(\sin t)^{2p}}{t}$ est positive, $J_{2p} = +\infty$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p} = +\infty.}$$

Partie III : Calcul de J_{2p+1}

III.1/ Un développement de Fourier

III.1.1/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. La fonction h_x est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.

Pour $t \in]-\pi, \pi[$, $h_x(-t) = \cos\left(\dfrac{x}{\pi}(-t)\right) = \cos\left(\dfrac{x}{\pi}t\right) = h_x(t)$. De plus, $h_x(-\pi) = h_x(\pi)$ par 2π-périodicité. Toujours par 2π-périodicité, la fonction h_x est paire. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(h_x) = 0$ et que

$$\begin{aligned}
a_n(h_x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(\frac{x}{\pi}+n\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{x}{\pi}-n\right)t\right)\right)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{x}{\pi}+n\right)t\right)}{\frac{x}{\pi}+n} + \frac{\sin\left(\left(\frac{x}{\pi}-n\right)t\right)}{\frac{x}{\pi}-n}\right]_0^{\pi} \quad (\text{car } x \notin \pi\mathbb{Z}) \\
&= \frac{\sin(x+n\pi)}{x+n\pi} + \frac{\sin(x-n\pi)}{x-n\pi} = \frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(h_x) = \frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(h_x).}$$

III.1.2/ Montrons que la fonction h_x est continue sur $\mathbb{R}$. h_x est déjà continue sur chaque $]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. De plus, $h_x(-\pi^+) = h_x(\pi^-) = h_x(\pi) = h_x(-\pi)$ et donc h_x est continue en $-\pi$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Ainsi, la fonction h_x est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de h_x converge vers h_x sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 0$,

$$1 = h_x(0) = \frac{a_0(h_x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(h_x)\cos(n\times 0) + b_n(h_x)\sin(n\times 0)) = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

En particulier, la série considérée converge.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2} = 1.}$$

III.2/ Etude d'un procédé de calcul

III.2.1/ La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc est bornée sur $[-1, 1]$. Soit M un majorant de l a fonction $|f|$ sur $[-1, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|\gamma_n| \leqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{|f(\sin t)|}{t}\ dt \leqslant \pi \times M \times \frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi} = \frac{2M}{2n-1}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2M}{2n-1} = 0$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\gamma_n = 0.}$$

III.2.2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = t - n\pi$, on obtient

$$\gamma_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin(x+n\pi))}{x+n\pi}\ dx = (-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{x+n\pi}\ dx \text{ (car } f \text{ est impaire).}$$

En posant $y = -x$, on a aussi

$$\gamma_n = (-1)^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(-y))}{-y + n\pi} (-dy) = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin y)}{y - n\pi}\, dy \text{ (car f est impaire).}$$

Par suite,

$$\gamma_n = \frac{1}{2}(\gamma_n + \gamma_n) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n f(\sin t)}{t + n\pi}\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n f(\sin t)}{t - n\pi}\, dt\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n t\, f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n 2t\, f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi}\, dt \text{ (car la fonction } t \mapsto \frac{(-1)^n t f(\sin t)}{t^2 - n^2\pi} \text{ est paire).}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = u_n.}$$

III.2.3/ Si $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série de terme général $(-1)^n \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge d'après la question III.1.2/. Il en est de même de la série de terme général $u_n(t)$. D'autre part, la série de terme général $u_n(0) = 0$ converge. Finalement, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la série de terme général $u_n(t)$ converge.

III.2.4/ • Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t^2 - n^2\pi^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi^2 < 0$ et en particulier, $t^2 - n^2\pi^2 \neq 0$. Donc chaque fonction u_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Montrons que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. M désigne toujours un majorant de la fonction $|f|$ sur $[-1, 1]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|u_n(t)| = \frac{2t|f(\sin t)|}{n^2\pi^2 - t^2} \leqslant \frac{\pi M}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}}$. Comme la série numérique de terme général $\frac{\pi M}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Mais alors, S est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que limite uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'une suite de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{S \text{ est continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

III.2.5/ Puisque la fonction S est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\, dt$ existe. Puisque la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, un théorème d'intégration terme à terme permet d'affirmer que la série de terme général $\gamma_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\, dt$ converge et que

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n.}$$

III.2.6/ Soient $A \geqslant \frac{\pi}{2} + \pi$ puis n_A le plus grand des entiers k tels que $\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant A$ c'est-à-dire $n_A = E\left(\frac{A - \frac{\pi}{2}}{\pi}\right) \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{f(\sin t)}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n_A} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f(\sin t)}{t}\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}+n_A\pi}^{A} \frac{f(\sin t)}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n_A} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{A} \frac{f(\sin t)}{t}\, dt \quad (*).$$

Or

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}+n_A\pi}^{A} \frac{f(\sin t)}{t}\, dt\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}+n_A\pi}^{A} \frac{|f(\sin t)|}{t}\, dt \leqslant \left(A - \left(\frac{\pi}{2} + n_A\pi\right)\right) \times \frac{M}{\frac{\pi}{2} + n_A\pi}$$
$$\leqslant \pi \times \frac{M}{\frac{\pi}{2} + n_A\pi} = \frac{2M}{2n_A + 1} \leqslant \frac{2M}{2(A-1)+1} = \frac{2M}{2A-1}.$$

Puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{2M}{2A-1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}+n_A\pi}^{A} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = 0$. Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} n_A = +\infty$, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt$ (car la série de terme général γ_k converge d'après la question III.2.5/) et

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\,dt.}$$

III.2.7/ Puisque f est dérivable en 0 et impaire, on a $f(u) \underset{u\to0}{=} f(0) + f'(0)u + o(u) = f'(0)u + o(u)$ et donc $f(\sin t) \underset{t\to0}{=} f'(0)(\sin t) + o(\sin t) = f'(0)t + o(t)$. On en déduit que les deux fonctions $g\ :\ t \mapsto \dfrac{f(\sin t)}{t}$ et $h\ :\ t \mapsto \dfrac{f(\sin t)}{\sin t}$ se prolongent par continuité en 0 en posant respectivement $g(0) = f'(0)$ et $h(0) = f'(0)$. Les fonctions g et h étant d'autre part continues sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ces fonctions sont intégrables sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En particulier, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt$ sont des intégrales convergentes.

III.2.8/ D'après les questions III.2.6/ et III.2.7/, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt$ est convergente. De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(\sin t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) + S(t)\right)\,dt \quad \text{(d'après la question III.2.6/).}\end{aligned}$$

Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $\Sigma(t) = f(\sin t)\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}\right) + S(t)$.

Quand t tend vers 0, $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{\sin t - t}{t\sin t} \sim \dfrac{t^3/6}{t^2} = \dfrac{t}{6}$. Par suite, $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}\right) = 0$. D'autre part, puisque la fonction S est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ d'après la question II.2.4/, $\lim\limits_{\substack{t\to0 \\ t\neq0}} S(t) = S(0)$ puis $\lim\limits_{t\to0} \Sigma(t) = S(0) = 0$. La fonction Σ se prolonge donc par continuité en 0 en posant $\Sigma(0) = 0$.

En résumé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Sigma(t)\,dt$ où $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\Sigma(t) = \begin{cases} f(\sin t)\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}\right) + S(t) \text{ si } t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.

La fonction Σ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Plus précisément, d'après la question III.1.2/, $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{\sin t}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin t}{t^2 - n^2\pi^2} = 1$ et donc après multiplication des deux membres par $\dfrac{f(\sin t)}{\sin t}$, $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{f(\sin t)}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2tf(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \frac{f(\sin t)}{\sin t}$ puis $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\Sigma(t) = \dfrac{f(\sin t)}{t} - \dfrac{f(\sin t)}{\sin t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2tf(\sin t)}{t^2 - n^2\pi^2} = 0$. Ceci reste vrai pour $t = 0$ par continuité de Σ en 0. Finalement,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt.}$$

III.3/ Application au calcul de J_{2p+1}

III.3.1/ On applique les résultats précédents à la fonction $f = Id_{/[-1,1]}$. f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0. Avec ce choix de f, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = J_1$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. D'après la question III.2.8/, on a

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

III.3.2/ On applique cette fois-ci les résultats précédents à la fonction f définie par $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = t^3$. f est bien définie et continue sur $[-1,1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^3}{t}\,dt = J_3$ et d'autre part,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2t))\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{4}.}$$

III.3.3/ Soit $p \in \mathbb{N}$. On applique maintenant les résultats précédents à la fonction f définie par $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = t^{2p+1}$. f est bien définie et continue sur $[-1,1]$ à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.

Toujours d'après la question II.2.8/, on a

$$J_{2p+1} = \int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t\,dt \text{ (intégrales de W}\textsc{allis}\text{).}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $I_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t\,dt$. On a $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ puis pour $p \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{2p+1} t\,dt = \left[-\cos t \sin^{2p+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{2p} t\,dt \\ &= (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^{2p} t\,dt = (2p+1)(I_p - I_{p+1}), \end{aligned}$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$$

On en déduit que pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2p)\times(2p-1)\times\ldots\times 2\times 1}{((2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2},$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\boxed{\forall \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

