SESSION 2008

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I : EXEMPLES

I.A

I.A.1 Réduction de l'endomorphisme s

I.A.1.1 Puisque la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique et que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, l'endomorphisme s est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E. D'après le théorème spectral, s est un endomorphisme diagonalisable de E.

$$S^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

I.A.1.2 Ainsi, on a ${}^tSS = S^2 = I_4$ et donc la matrice S est une matrice orthogonale. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormale, on en déduit que s est un automorphisme orthogonal de E.
On sait alors que les valeurs propres de s appartiennent à $\{-1, 1\}$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de s et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a

$$\|x\| = \|s(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|,$$

et puisque $\|x\| \neq 0$, on en déduit que $|\lambda| = 1$ et donc que $\lambda \in \{-1, 1\}$. Maintenant, on sait que s est diagonalisable. En particulier, s admet au moins une valeur propre. De plus, si 1 était l'unique valeur propre de s, on en déduirait que $s = Id_E$ (car s coïnciderait avec Id_E sur une base de E) ce qui n'est pas. De même, -1 ne peut être l'unique valeur propre de s car sinon $s = -Id_E$. Finalement, les valeurs propres de s sont -1 et 1.

I.A.1.3 Notons α et β les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres 1 et -1. Puisque s est diagonalisable, on sait que $\dim(E_1) = \alpha$, $\dim(E_{-1}) = \beta$ et $\alpha + \beta = 4$. Maintenant, on sait que la trace de s est la somme des valeurs de propres de s comptées chacune un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. Or, $\mathrm{Tr}(s) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$. Ainsi, $\alpha + \beta = 4$ et $1 \times \alpha + (-1) \times \beta = 0$. On en déduit que $\alpha = \beta = 2$.

$$\boxed{\dim(E_1) = 2 \text{ et } \dim(E_{-1}) = 2.}$$

I.A.2

I.A.2.1 $s(u_1) = \frac{1}{3}(3e_1 + 3e_3 + 3e_4) = e_1 + e_3 + e_4 = u_1$ et $s(u_2) = \frac{1}{3}(3e_1 + 3e_2 + 6e_4) = e_1 + e_2 + 2e_4 = u_2$. Par suite, u_1 et u_2 sont deux vecteurs de E_1. Puisque u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, la famille (u_1, u_2) est une famille libre de E_1 et puisque $\dim(E_1) = 2$, (u_1, u_2) est une base de E_1.

L'orthonormalisée de SCHMIDT de cette base est alors une base orthonormale de E_1.

- On prend déjà $e'_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$.
- Ensuite,

$$u_2 - (u_2|e'_1)e'_1 = (e_1 + e_2 + 2e_4) - \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4) = e_2 - e_3 + e_4,$$

et on prend $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$.

$$\boxed{\text{Une base orthonormale de } E_1 \text{ est } (e'_1, e'_2) \text{ où } e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) \text{ et } e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4).}$$

I.A.2.2 Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ puis $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$.

$$u_4 \in (u_1,u_2,u_3)^\perp \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+c+d=0 \\ a+b+2d=0 \\ -a+b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} d=-a-c \\ -a+b-2c=0 \\ -a+b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=a-b \\ d=-a-c \\ -a+b-2(a-b)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=b \\ c=0 \\ d=-a \end{array}\right.$$

Un vecteur non nul orthogonal à u_1, u_2 et u_3 est $u_4 = e_1 + e_2 - e_4$.

Maintenant, $s(u_3) = \dfrac{1}{3}(e_1 - e_2 - e_3) = -u_3$ et $u_3 \in E_{-1}$. Ensuite, puisque s est un endomorphisme symétrique de E, on sait que $E_{-1} = E_1^\perp$ et donc $u_4 \in E_1^\perp = E_{-1}$. Finalement, (u_3, u_4) est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de E_{-1} et donc une base orthogonale de E_{-1} car $\dim(E_{-1}) = 2$.

$$\boxed{(u_3,u_4) \text{ est une base orthogonale de } E_{-1}.}$$

I.A.3

I.A.3.1 Soit $x \in E$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $s(y) = y$ et $s(z) = -z$. Dons, $s^k(x) = s^k(y) + s^k(z) = y + (-1)^k z$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(y + (-1)^k z) = y + \frac{1}{n}\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}z = y + \frac{1-(-1)^n}{2n}z.$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = y + \frac{1-(-1)^n}{2n}z.}$$

I.A.3.2 Quand n tend vers $+\infty$, $S_n(x)$ tend vers y. Maintenant, on sait que $y = \dfrac{1}{2}(x+s(x))$ (car $x+s(x) = y+z+y-z$) et donc

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}(x+s(x)).}$$

I.B

I.B.1 Une propriété concernant les normes.

I.B.1.1 Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ puis $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$.
On a $\ell(u) = \dfrac{1}{4}((3a+c)e_1 + (3b+d)e_2 + (a+3c)e_3 + (b+4d)e_4)$ et donc

$$\begin{aligned}\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 &= (a^2+b^2+c^2+d^2) - \frac{1}{16}((3a+c)^2 + (3b+d)^2 + (a+3c)^2 + (b+3d)^2) \\ &= \frac{1}{16}(6a^2+6b^2+6c^2+6d^2-12ac-12bd) = \frac{3}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd) \\ &= \frac{3}{8}((a-c)^2+(b-d)^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall u = ae_1+be_2+ce_3+de_4,\ \|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = \frac{3}{8}((a-c)^2+(b-d)^2),}$$

et en particulier,

$$\boxed{\forall u \in E,\ \|\ell(u)\| \leqslant \|u\|.}$$

I.B.1.2 De plus, $\|\ell(u)\| = \|u\| \Leftrightarrow \frac{3}{8}((a-c)^2 + (b-d)^2) = 0 \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

$$\boxed{\{u \in E/\ \|\ell(u)\| = \|u\|\} = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4).}$$

$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de cette matrice ne sont pas colinéaires et les deux dernières sont les opposées des deux premières. Donc, $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - I_4\right) = 2 < 4$. On en déduit déjà que 1 est valeur propre de ℓ. De plus, $\dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = 4 - \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - I_4\right) = 2$.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } \ell \text{ et } \dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)) = 2.}$$

Remarque. Comme $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E)$ est sous-espace contenu dans $\{u \in E/\ \|\ell(u)\| = \|u\|\} = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$ qui est aussi un sous-espace de dimension 2, on a $\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) = \{u \in E/\ \|\ell(u)\| = \|u\|\} = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$

I.B.2 Réduction de l'endomorphisme ℓ.

I.B.2.1 Après avoir échanger les colonnes 2 et 3 puis les lignes 2 et 3, un calcul par blocs fournit

$$\chi_\ell = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} - X & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} - X & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} - X & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - X \end{vmatrix}$$

$$= \left(\left(\frac{3}{4} - X\right)^2 - \frac{1}{16}\right)^2 = (X-1)^2\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\boxed{\chi_\ell = (X-1)^2\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.}$$

I.B.2.2 $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes de cette matrice ne sont pas colinéaires et les deux dernières sont égales aux deux premières. Donc, $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4\right) = 2 < 4$. On en déduit déjà que 1 est valeur propre de ℓ. De plus, $\dim(\text{Ker}(\ell - \frac{1}{2}\text{Id}_E)) = 4 - \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\ell) - \frac{1}{2}I_4\right) = 2$.

En résumé, χ_ℓ est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de ℓ est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. On sait alors que ℓ est diagonalisable et donc E est somme directe des sous-espaces propres de ℓ ou encore

$$\boxed{G_1 \text{ et } G_{1/2} \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

I.B.3

I.B.3.1 Soient $x \in E$ puis $k \in \mathbb{N}$. $\ell^k(x) = \ell^k(y) + \ell^k(z) = y + \dfrac{1}{2^k}z$.

I.B.3.2 Soient $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(y + \frac{1}{2^k}z\right) = y + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)z.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $L_n(x)$ tend vers y. De plus, les égalités $y + z = x$ et $y + \dfrac{1}{2}z = \ell(x)$ fournissent $y = 2\ell(x) - x$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{n \to +\infty} L_n(x) = 2\ell(x) - x.}$$

I.C

I.C.1

$${}^t TT = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

et donc

$$\boxed{T \in O_4(\mathbb{R}).}$$

I.C.2

I.C.2.1 D'une part, $t(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_3 + e_4) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\varepsilon_1$ et d'autre part

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3) + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1.$$

Les vecteurs e_1 et ε_1 sont unitaires et orthogonaux. Donc, la famille (e_1, ε_1) est orthonormée. En particulier, cette famille est libre. On en déduit que F_1 est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

$t(F_1) = \mathrm{Vect}(t(e_1), t(\varepsilon_1)) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\varepsilon_1, \sqrt{\dfrac{2}{3}}e_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1\right) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$ et donc F_1 est stable par t.

$$\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension 2 et stable par } t \text{ et } (e_1, \varepsilon_1) \text{ est une base orthonormée de } F_1.}$$

I.C.2.2 La matrice de t dans une certaine base orthonormée est une matrice orthogonale. On en déduit que t est un automorphisme orthogonal de E.
D'après ce qui précède, la restriction de t à F_1 est un endomorphisme de F_1 et donc un automorphisme orthogonal de F_1. On a en particulier $t(F_1) = F_1$.
Soit $y \in F_2 = F_1^{\perp}$. Montrons que $t(y) \in F_2$. Pour tout x de F_1, on a

$$(t(y)|t(x)) = (y|x) = 0.$$

Donc, $y \in (t(F_1))^\perp = F_1^\perp = F_2$. Ainsi, F_2 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 ($\dim(F_2) = \dim(E) - \dim(F_1) = 4 - 2 = 2$) et stable par t.
e_2 et ε_2 sont orthogonaux à e_1 et ε_1. Donc e_2 et ε_2 sont dans $(e_1, \varepsilon_1)^\perp = (\text{Vect}(e_1, \varepsilon_1))^\perp = F_1^\perp = F_2$. De plus, la famille (e_2, ε_2) est une famille orthonormée et donc une base orthonormée de F_2. Finalement,

$$\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension 2 et stable par } t \text{ et } (e_2, \varepsilon_2) \text{ est une base orthonormée de } F_2.}$$

I.C.3

I.C.3.1 $\mathscr{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de E et t est un automorphisme orthogonal. Par suite, T' est une matrice orthogonale.

On a déjà $t(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\varepsilon_1$ et $t(\varepsilon_1) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}e_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. D'autre part,

$$t(e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(e_3 - e_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_2,$$

et d'autre part

$$t(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3) - \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4) = -\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_2.$$

On en déduit que

$$\boxed{T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.}$$

I.C.3.2 $T' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

La matrice de $t_{/F_1}$ dans la base $(e_1, \varepsilon_1$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ et donc $t_{/F_1}$ est la rotation d'angle $-\theta$. De même, $t_{/F_2}$ est la rotation d'angle θ.

I.C.3.3 On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(t^k) = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}.}$$

I.C.4 Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\zeta_n(\omega) = n$. Dans ce cas, la suite $(\zeta_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

• Si $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\omega} \neq 1$ et

$$\zeta_n(\omega) = \frac{1 - e^{in\omega}}{1 - e^{i\omega}} = \frac{e^{in\omega/2}}{e^{i\omega/2}} \times \frac{e^{-in\omega/2} - e^{in\omega/2}}{e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}} = e^{i(n-1)\omega/2}\frac{\sin(n\omega/2)}{\sin(\omega/2)}.$$

En particulier, $|\zeta_n(\omega)| = \dfrac{|\sin(n\omega/2)|}{|\sin(\omega/2)|} \leq \dfrac{1}{|\sin(\omega/2)|}$.

$$\boxed{\text{La suite } (\zeta_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée si et seulement si } \omega \notin 2\pi\mathbb{Z}.}$$

I.C.5

I.C.5.1 $t_{/F_1}$ est un endomorphisme de F_1 et donc, puisque $(\mathscr{L}(F_1), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, T_{n/F_1} est un endomorphisme de F_1.

I.C.5.2
I.C.5.2.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,\varepsilon_1)}(t^k_{/F_1})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} V_k\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\theta) \\ -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\theta) & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} & \dfrac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} \\ -\dfrac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} & \dfrac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} & \dfrac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} \\ -\dfrac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} & \dfrac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} \end{pmatrix}.}$$

I.C.5.2.2 θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$ et donc la suite $(\zeta_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Il en est de même des suites $(\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(y) = \lim_{n\to+\infty}\left(\alpha\frac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n} + \beta\frac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n}\right)e_1 + \left(-\alpha\frac{\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta))}{n} + \beta\frac{\mathrm{Re}(\zeta_n(\theta))}{n}\right)\varepsilon_1 = 0.$$

$$\boxed{\forall y \in F_1,\ \lim_{n\to+\infty} T_n(y) = 0.}$$

I.C.5.3 De même, en remplaçant θ par $-\theta$, $\forall z \in F_2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(z) = 0$ et donc pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(y) + \lim_{n\to+\infty} T_n(z) = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = 0.}$$

PARTIE II

II.A

II.A.1 Soient $y \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in E$. On a $\ell(y) = y$ et donc $\ell^*(y) = \ell^{-1}(y) = y$. Par suite,

$$(y|(\ell - \mathrm{Id}_E)(z)) = ((\ell - \mathrm{Id}_E)^*(y)|z) = (y - y|z) = 0.$$

Ainsi, $\forall (y, z) \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \times E$, $(y|(\ell - \mathrm{Id}_E)(z)) = 0$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \subset (\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$.
Mais de plus, le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)) = \dim(\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)^{\perp}),$$

et finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E))^{\perp}.}$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

II.A.2 Pour $k \in \mathbb{N}$, $\ell^k(x) = \ell^k(y) + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z) = y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)$ et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(y + \ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z).$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n(x) = y + \frac{1}{n}(\ell^n(z) - z).}$$

II.A.3 $\ell \in O(E)$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell^n \in O(E)$. Par suite,

$$\left\|\frac{1}{n}(\ell^n(y) - y)\right\| \leq \frac{\|\ell^n(y)\| + \|y\|}{n} = \frac{\|y\| + \|y\|}{n} = \frac{2\|y\|}{n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(\ell^n(y) - y) = 0$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{n \to +\infty} L_n(x) = y.}$$

Remarque. Ceci confirme le résultat de I.C.5.3 car $\mathrm{Ker}(t - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ et donc $\forall x \in E,\ y = 0$.

II.B

II.B.1 Soit $x \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque $f \in B(E)$, on a

$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x)|f^*(x)) = (x|f(f^*(x))) \leq \|x\| \times \|f(f^*(x))\| \leq \|x\| \times \|f^*(x)\|.$$

Ainsi, pour tout x de E, on a $\|f^*(x)\|^2 \leq \|x\| \times \|f^*(x)\|$ (I). Maintenant, si $f^*(x) = 0$, on a $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$ et si $f^*(x) \neq 0$, on a $\|f^*(x)\| > 0$ et après simplification par $\|f^*(x)\|$, l'inégalité (I) fournit encore $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$. Ainsi, $\forall x \in E,\ \|f^*(x)\| \leq \|x\|$ et donc

$$\boxed{f^* \in B(E).}$$

II.B.2 Soit $x \in E$ tel que $f(x) = x$. On a

$$\begin{aligned}\|f^*(x) - x\|^2 &= \|f^*(x)\|^2 - 2(f^*(x)|x) + \|x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 - 2(x|x) + \|x\|^2 \\ &= \|f^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

On en déduit encore que $f^*(x) - x = 0$ et donc que $f^*(x) = x$. On a montré que $\forall x \in E,\ f(x) = x \Rightarrow f^*(x) = x$ et donc que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{Id}_E)$. Maintenant, puisque $f^* \in B(E)$, on a aussi $\mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}((f^*)^* - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{Id}_E).}$$

II.B.3 Redémontrons que si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = (\mathrm{Im}(\varphi))^\perp$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (\mathrm{Im}(\varphi))^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in E,\ (x|\varphi(y)) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E,\ (\varphi^*(x)|y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi^*(x) \in E^\perp \Leftrightarrow \varphi^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varphi^*). \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^* - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_E)^*) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E))^\perp$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E))^\perp.}$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

II.C

II.C.1 Puisque $x \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$, on a $\ell(x) - x = 0$ et donc $\ell^2(y) - \ell(y) = \ell(y) - y$. En prenant l'image des deux membres de cette égalité par ℓ^k, $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\ell^{k+2}(y) - \ell^{k+1}(y) = \ell^{k+1} - \ell^k(y)$ et donc la suite $(\ell^{k+1}(y) - \ell^k(y))_{k\in\mathbb{N}}$ est constante.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\ell^n(y) = y + \sum_{k=0}^{n-1} (\ell^{k+1}(y) - \ell^k(y)) = y + n(\ell(y) - y) = y + nx.$$

Mais alors pour tout entier naturel non nul n, $x = \dfrac{1}{n}(\ell^n(y) - y)$. En particulier, puisque $\ell \in B(E)$, on a

$$\|x\| = \frac{1}{n}\|\ell^n(y) - y\| \leq \frac{\|\ell^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\|x\| = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ et le théorème du rang montre que

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E).}$$

II.C.2 Le travail effectué en II.A s'applique alors intégralement. Tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = y + \ell(z) - z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in E$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(x) = y$.

PARTIE III

III.1 $\sigma_e(e) = e - 2\dfrac{(e|e)}{\|e\|^2}e = e - 2e = -e$ et si x est orthogonal à e, $\sigma_e(x) = x$. Ainsi, si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Vect}(e) \oplus (\mathrm{Vect}(e))^\perp$, σ_e coïncide sur $\mathscr{B}'$ avec la réflexion d'hyperplan $(e)^\perp$. On en déduit que

$$\boxed{\sigma_e \text{ est la réflexion d'hyperplan } (e)^\perp.}$$

En particulier, σ_e est un automorphisme orthogonal.

III.2

III.2.1 e est dans $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E)$. Puisque $\ell \in O(E)$, la question II.A.1 permet d'affirmer que $\mathrm{Im}(\ell - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Ker}(\ell - \mathrm{Id}_E))^\perp = W^\perp$ et donc e est orthogonal à W.

III.2.2 Puisque $u \notin W$, on a $e \neq 0$. Ensuite, $\sigma_e(\ell(u) - u) = \sigma_e(e) = -e = -\ell(u) + u$.
D'autre part, $(\ell(u) - u|\ell(u) + u) = \|\ell(u)\|^2 - \|u\|^2 = 0$ car $\ell \in O(E)$ et d'après la question III.1, $\sigma_e(\ell(u) + u) = \ell(u) + u$. On a donc $\sigma_e(\ell(u)) - \sigma_e(u) = -\ell(u) + u$ et $\sigma_e(\ell(u)) + \sigma_e(u) = \ell(u) + u$. En additionnant et en retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\boxed{\sigma_e(\ell(u)) = u \text{ (et } \sigma_e(u) = \ell(u)).}$$

III.2.3 • Montrons que $\text{Vect}(u, W) \subset \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$.
Soit $x \in W$. $(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)(x) = \sigma_e(\ell(x)) - x = \sigma_e(x) - x = 0$ d'après la question III.1 car $x \in (\text{Vect}(e))^\perp$ d'après la question III.2.1.
Ensuite, $(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)(u) = \sigma_e(\ell(u)) - u = u - u = 0$. Finalement, u et tout vecteur de W sont dans $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$ et donc $\text{Vect}(u, W) \subset \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$.

• Montrons que $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(u, W)$.
Soit $x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$. On a donc $\sigma_e(\ell(x)) = x$ puis $\ell(x) = \sigma_e^{-1}(x) = \sigma_e(x)$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - \lambda u \in W$. Or,

$$x - \lambda u \in W \Leftrightarrow \ell(x - \lambda u) = x - \lambda u \Leftrightarrow \ell(x) - x = \lambda(\ell(u) - u) \Leftrightarrow \ell(x) - x = \lambda e.$$

Maintenant, $\sigma_e(\ell(x) - x) = \sigma_e(\ell(x)) - \sigma_e(x) = x - \ell(x) = -(\ell(x) - x)$. Ainsi, le vecteur $\ell(x) - x$ est changé en son opposé par σ_e et on en déduit que $\ell(x) - x \in \text{Vect}(e)$. On peut donc trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ell(x) - x = \lambda e$ et donc tel que $x - \lambda u \in W$.
En résumé, $\forall x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ x - \lambda u \in W$ ou encore $\forall x \in E$, $(x \in \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \Rightarrow x \in \text{Vect}(u, W)$ ce qui montre que $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) \subset \text{Vect}(u, W)$.

Finalement,

$$\boxed{\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) = \text{Vect}(u, W).}$$

Ainsi, $\ell' = \sigma_e \circ \ell$ est un automorphisme orthogonal (car σ_e et ℓ le sont) tels que $\dim(\text{Ker}(\ell' - \text{Id}_E)) = 1 + \dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E))$.

III.2.4 Soit ℓ est un automorphisme orthogonal distinct de Id_E. On a $W \neq E$ et donc $k \in [\![0, n-1]\!]$.
• Si $k = n - 1$, d'après la question précédente, il existe $u \notin W$ tel que $\text{Vect}(u, W) = \text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E)$. Dans ce cas, $\text{Vect}(u, W)$ est de dimension n puisque $u \notin W$ et donc $\text{Ker}(\sigma_e \circ \ell - \text{Id}_E) = E$ puis $\sigma_e \circ \ell = \text{Id}_E$ et finalement $\ell = \sigma_e^{-1} = \sigma_e$.
Ainsi, si $k = n - 1$, ℓ est produit de $1 = n - (n - 1) = n - k$ réflexions.

• Sinon $k \in [\![0, n-2]\!]$ et par récurrence, on dispose de vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-k}$ tels que $u_1 \notin W$ et $\forall i \in [\![2, n-k]\!]$, $u_i \notin \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{i-1}, W)$ et $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_{n-k}, W) = \text{Ker}(\sigma_{e_{n-k}} \circ \ldots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - \text{Id}_E)$ avec $\forall i \in [\![1, n-k]\!]$, $e_i = \ell(u_i) - u_i$.
On a alors $\dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_{n-k}, W)) = n - k + k = n$ et donc $\text{Ker}(\sigma_{e_{n-k}} \circ \ldots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell - \text{Id}_E) = E$. On en déduit que $\sigma_{e_{n-k}} \circ \ldots \circ \sigma_{e_1} \circ \ell = \text{Id}_E$ puis que $\ell = \sigma_{e_1}^{-1} \circ \ldots \circ \sigma_{e_{n-k}}^{-1} = \sigma_{e_1} \circ \ldots \circ \sigma_{e_{n-k}}$. ℓ est encore une fois un produit de $n - k$ réflexions.

Avec la convention usuelle qu'un produit vide d'automorphismes est l'identité, le résultat reste vrai si $\ell = \text{Id}_E$ et on a montré que

$$\boxed{\text{tout automorphisme orthogonal } \ell \text{ tel que } \dim(\text{Ker}(\ell - \text{Id}_E) = k \text{ est la composée de } n - k \text{ réflexions.}}$$

