SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1.

I.1.1. $a_{1,1} = \binom{p}{p} = 1$, $a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p}$, $a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n} = 1$ et $a_{n-p+1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}$.

I.1.2. $d_n = a_{1,1} = 1$ puis $d_{n-1} = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = 1.$

$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \binom{n+2}{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & n(n-1)/2 \\ 1 & n & (n+1)n/2 \\ 1 & n+1 & (n+2)(n+1)/2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n-1 & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 1 & n+1 \end{vmatrix} \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\boxed{d_n = d_{n-1} = d_{n-2} = 1.}$$

I.1.3.

I.3.1.1 Soient $i \in [\![2, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Après transformation, le nouveau coefficient ligne i, colonne j, vaut

$$a_{i,j} - a_{i-1,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{p+i+j-3}{p+i-2} = \begin{cases} 0 \text{ si } j = 1 \\ \binom{p+i+j-3}{p+i-1} \text{ si } j \geq 2 \end{cases}.$$

I.3.1.2 Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. En développant d_p suivant sa première colonne, on obtient

$$d_p = 1 \times \det\left(\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)\right)_{2\leq i,j\leq n-p+1} = \det\left(\left(\binom{p+(i'+1)+(j'+1)-3}{p+(i'+1)-1}\right)\right)_{1\leq i',j'\leq n-p}$$

$$= \det\left(\left(\binom{(p+1)+i'+j'-2}{(p+1)+i'-1}\right)\right)_{1\leq i',j'\leq n-(p+1)+1} = d_{p+1}.$$

Ainsi, la suite $(d_p)_{0\leq p\leq n}$ est constante et donc $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $d_p = d_n = 1$.

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n]\!],\ d_p = 1.}$$

I.2.

I.2.1. $D_0 = \det((i+j)!)_{0\leq i,j\leq 0} = 0! = 1$ puis $D_1 = \begin{vmatrix} 0! & 1! \\ 1! & 2! \end{vmatrix} = 2-1 = 1$ puis

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix} \\ &= (48-36)-(24-12)+2(6-4) = 4. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\leq i,j\leq n} = \det\left(\binom{(i'-1)+(j'-1)}{i'-1}\right)_{1\leq i',j'\leq n+1} = \det\left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\leq i',j'\leq n+1} = d_{n+1} = 1,$$

et donc $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$.

I.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$. Par linéarité d'un déterminant par rapport à chacune de ces lignes, on peut mettre en facteur $\frac{1}{0!}$ de la ligne 0, $\frac{1}{1!}$ de la ligne 1,..., $\frac{1}{n!}$ de la ligne n et donc $\frac{1}{\prod_{i=0}^{n} i!}$ de Δ_n. Par linéarité par rapport aux colonnes, on met encore en facteur $\frac{1}{\prod_{j=0}^{n} j!}$ de Δ_n et on obtient

$$\Delta_n = \frac{1}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2}\det((i+j)!)_{0\leq i,j\leq n} = \frac{1}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2} D_n.$$

Par suite,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 \Delta_n,}$$

I.2.3. et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2.}$$

PARTIE II

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1.

II.A.1.1 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Posons $X_i = (x_k^{(i)})_{1\leq k\leq n}$ et $X_j = (x_l^{(l)})_{1\leq l\leq n}$.

$${}^tX_iCX_j = \sum_{1\leq k,l\leq n} x_k^{(i)} c_{k;l} x_l^{(j)} = \sum_{1\leq k,l\leq n} \delta_{k,i} c_{k;l} \delta_{l,j} = c_{i,j}.$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ {}^tX_iCX_j = c_{i,j}.}$$

II.A.1.2 Si $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, ${}^tXCY = 0$ alors en particulier, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{i,j} = {}^tX_iCX_j = 0$ et donc $C = 0$. Réciproquement, si $C = 0$, $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, ${}^tXCY = 0$.

$$\boxed{\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (C = 0 \Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ {}^tXCY = 0).}$$

II.A.2. Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où $((x_i)_{1 \le i \le n}, (y_i)_{1 \le i \le n}) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i (e_i|e_j) y_j \sum_{1 \le i,j \le n} x_i a_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right) = {}^tX \times (AY) = {}^tXAY.$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y) = tXAY.}$$

II.A.3.

II.A.3.1 On sait que $X = PX'$.

II.A.3.2 Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$${}^tX'A'Y' = (x|y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y'.$$

Ainsi, pour tout $(X', Y') \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, ${}^tX'A'Y' = {}^tX'({}^tPAP)Y'$. La question II.A.1.2 permet alors d'affirmer que $A' = {}^tPAP$.

$$\boxed{A' = {}^tPAP.}$$

II.A.3.3 Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a'_{i,j} = (e'_i|e'_j) = \delta_{i,j}$ et donc $A' = I_n$. L'égalité précédente s'écrit donc ${}^tPAP = I_n$ ou encore $A = {}^tP^{-1}P^{-1}$.

II.A.3.4 Mais alors, $\det A = \det({}^tP^{-1}P^{-1}) = \det({}^tP^{-1}) \times \det(P^{-1}) = (\det(P^{-1}))^2 > 0$ car $\det(P^{-1}) \neq 0$.

$$\boxed{\det A > 0.}$$

II.A.3.5 Si $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ est une famille libre, $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ est une base de l'espace $F = \text{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ et d'après la question précédente, on a $\det B > 0$.

B.

II.B.1.

II.B.1.1 $\det M = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) \\ (u_1|u_2) & \|u_2\|^2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2 \ge 0$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

II.B.1.2 avec égalité si et seulement si la famille (u_1, u_2) est liée. Donc

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est libre si et seulement si } \det M > 0.}$$

II.B.2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient ligne i du vecteur colonne MX vaut

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^{n} (u_i|u_j) x_j = (u_i| \sum_{j=1}^{n} x_j u_j) = (u_i|v).$$

$$\boxed{MX = ((u_i|v))_{1 \le i \le n}.}$$

II.B.3. ${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} x_i (u_i|v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i | v\right) = (v|v) = \|v\|^2$.

$$\boxed{{}^tXMX = \|v\|^2.}$$

II.B.4. M est symétrique et réelle. D'après le théorème spectral, les valeurs propres de M sont réelles. Donc λ appartient à $\mathbb{R}$.

Soit X un vecteur propre associé. On a ${}^tXMX = {}^tX(\lambda X) = \lambda({}^tXX) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Comme X n'est pas nul, on a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ et donc

$$\lambda = \frac{{}^t XMX}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\|v\|^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont réelles positives.}}$$

II.B.5. $MX = 0 \Rightarrow {}^t XMX = 0 \Rightarrow \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0$.
Réciproquement, $v = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow MX = 0$.

$$\boxed{MX = 0 \Leftrightarrow v = 0.}$$

II.B.6. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0 &\Rightarrow v = 0 \Rightarrow MX = 0 \text{ (d'après la question précédente)}\\
&\Rightarrow X = 0 \text{ (car } M \text{ est inversible)}\\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est inversible, la famille } (u_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est libre.}}$$

PARTIE III

III.1. Le discriminant réduit de P est

$$\Delta' = \cos^2(\beta)\cos^2(\gamma) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 1 = (1 - \cos^2(\beta))(1 - \cos^2(\gamma)) = (\sin(\beta)\sin(\gamma))^2.$$

P admet donc les deux racines $\cos(\beta)\cos(\gamma) \pm \sin(\beta)\sin(\gamma)$ ou encore $\cos(\beta \pm \gamma)$.

$$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } \cos(\beta + \gamma) \text{ et } \cos(\beta - \gamma).}$$

III.2.

$$\begin{aligned}
\det(G(u_1, u_2, u_3)) &= \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_1|u_2) & \|u_2\|^2 & (u_2|u_3) \\ (u_1|u_3) & (u_2|u_3) & \|u_3\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{vmatrix}\\
&= (1 - \cos^2(\beta)) - \cos(\alpha)(\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma)) + \cos(\gamma)(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\gamma))\\
&= -\cos^2(\alpha) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 1 = -P(\cos(\alpha))\\
&= (\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha)) \text{ (d'après la question précédente.)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(G(u_1, u_2, u_3)) = (\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\alpha)).}$$

III.3. Puisque $\det(G(u_1, u_2, u_3)) \geq 0$, on a $-P(\cos(\alpha)) \geq 0$ ou encore $P(\cos(\alpha)) \leq 0$. $\cos(\alpha)$ est donc compris entre les deux racines de P à savoir $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

III.4. $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$ ou $\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma)$.
• **1er cas.** $\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in \beta + \gamma + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\alpha \in -\beta - \gamma + 2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\alpha - \beta - \gamma \in 2\pi\mathbb{Z})$.
Maintenant, on a $0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi$ et donc $\alpha + \beta + \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma \in \{0, 2\pi\} \Leftrightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi)$.
De même, $-2\pi \leq \alpha - \beta - \gamma \leq \pi$ et donc $\alpha - \beta - \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha - \beta - \gamma \in \{-2\pi, 0\} \Leftrightarrow (\beta + \gamma = \alpha + 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma) \Leftrightarrow ((\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = \pi)$ ou $\alpha = \beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$ car $\alpha \geq \beta$.
En résumé, $\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi)$ ou $\alpha = \beta + \gamma) \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma = 2\pi)$ ou $\alpha = \beta + \gamma)$.

• **2ème cas.** $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in \beta - \gamma + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\alpha \in -\beta + \gamma + 2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\alpha - \beta + \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\alpha + \beta - \gamma \in 2\pi\mathbb{Z})$.
Maintenant, on a $0 \leq \alpha - \beta + \gamma \leq 2\pi$ et donc $\alpha - \beta + \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma \in \{0, 2\pi\} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma = \beta$ ou $\alpha + \gamma = \beta + 2\pi)$.
Puisque $\gamma \geq 0$ et $\alpha \geq \beta$, $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ et $\gamma = 0$.
De même, $0 \leq \alpha + \beta - \gamma \leq 2\pi$ et donc $\alpha + \beta - \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha + \beta - \gamma \in \{0, 2\pi\} \Leftrightarrow (\alpha + \beta = \gamma$ ou $\alpha + \beta = \gamma + 2\pi)$.
Puisque $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha\pi$, $\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\alpha + \beta = \gamma + 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \beta = \pi$ et $\gamma = 0$.
En résumé, $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ ou $\alpha = \beta = \pi$ et $\gamma = 0$.

Finalement, $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ou $\alpha = \beta = \pi$ et $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma$.

$$\boxed{\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \text{ ou } \alpha = \beta + \gamma.}$$

III.5.

III.5.1

$$\begin{aligned}
\chi_G &= \begin{vmatrix} 1-X & c & c \\ c & 1-X & c \\ c & c & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2c-X & c & c \\ 1+2c-X & 1-X & c \\ 1+2c-X & c & 1-X \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (1+2c-X) \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 1 & 1-X & c \\ 1 & c & 1-X \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à la 1ère colonne)} \\
&= (1+2c-X) \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & 1-c-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-c-X \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= (1+2c-X)(1-c-X)^2 = -(X-(1+2c))(X-(1-c))^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_{G((u_1,u_2,u_3))} = -(X-(1+2c))(X-(1-c))^2 \text{ et } \mathrm{Sp}(G((u_1,u_2,u_3))) = (1+2c, 1-c, 1-c).}$$

III.5.2 D'après la question II.B.4, les valeurs propres de $G((u_1, u_2, u_3))$ sont positives. On a donc $1 - c \geq 0$ et $1 + 2c \geq 0$ ou encore

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq c \leq 1.}$$

III.5.3

III.5.3.1 $\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 + 2((u_1|u_2) + (u_2|u_3) + (u_3|u_1)) = 3 + 2(3 \times (-\frac{1}{2})) = 0$ et donc

$$\boxed{u_1 + u_2 + u_3 = 0.}$$

III.5.3.2 Quand $c = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Sp}G = (0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Ainsi, 0 est valeur propre simple de G et donc $\mathrm{Ker}G$ est de dimension 1. Comme

$$G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$. Mais alors, d'après la question II.B.5., le vecteur $v = 1u_1 + 1u_2 + 1u_3 = u_1 + u_2 + u_3$ est nul.

PARTIE IV

IV.1.

IV.1.1. Dans $\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_n))$, on met λ en facteur de la dernière colonne puis de la dernière ligne et on obtient

$$\boxed{\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_n)) = \lambda^2\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},v_n)).}$$

IV.1.2. Par linéarité par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne, $\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\lambda v_1))$ est somme de quatre déterminants.
Le premier est $\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},v_n))$.

Le deuxième est $\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \dots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) \\ (\lambda v_1|v_1) & \dots & (\lambda v_1|v_{n-1}) & (\lambda v_1|v_n) \end{vmatrix}$. Ce déterminant est nul car ses première et dernière lignes sont colinéaires.

Le troisième est $\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|\lambda v_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \dots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|\lambda v_1) \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_{n-1}) & (v_n|\lambda v_1) \end{vmatrix}$. Ce déterminant est nul car ses première et dernière colonnes sont colinéaires.

Le dernier est $\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_1))$. Il est nul car la famille $(v_1,\dots,v_{n-1},\lambda v_1)$ est liée.

Finalement,

$$\boxed{\det(G((v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\lambda v_1)) = \det(G((v_1,\dots,v_{n-1},v_n)).}$$

IV.2.

IV.2.1. Puisque w est orthogonal aux v_i, en développant $\det(G(v_1,\dots,v_n,w))$ suivant sa dernière colonne, on obtient

$$\boxed{\det(G(v_1,\dots,v_n,w)) = \|w\|^2\det(G(v_1,\dots,v_n)).}$$

IV.2.2. Notons $p_F(v)$ le projeté orthogonal de v sur F puis posons $w = v - p_F(v)$. $p_F(v)$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et donc, en généralisant le résultat de la question IV.1.2.,

$$\begin{aligned}\det(G(v_1,\dots,v_n,v)) &= \det(G(v_1,\dots,v_n,v-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i)) = \det(G(v_1,\dots,v_n,w)) = \|w\|^2\det(G(v_1,\dots,v_n)) \\ &= (d(v,F))^2\det(G(v_1,\dots,v_n)).\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(G(v_1,\dots,v_n,v)) = (d(v,F))^2\det(G(v_1,\dots,v_n)).}$$

IV.3.

IV.3.1. Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $t\mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. La fonction $t\mapsto t^k e^{-t}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto t^{k+1}$ et $t\mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A t^{k+1}e^{-t}\,dt = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^A + (k+1)\int_0^A t^k e^{-t}\,dt = -A^{k+1}e^{-A} + (k+1)\int_0^A t^k e^{-t}\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $J_{k+1} = (k+1)J_k$. En tenant compte de $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$, par récurrence on a

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ J_k = k!.}$$

IV.3.2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$(e_i|e_j) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{i+j} \, dt = (i+j)!.$$

IV.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions IV.2.2 et I.2.3,

$$(d(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \frac{\det(G(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n))}{\det(G(e_1, \ldots, e_{n-1}))} = \frac{\det((i+j)!)_{0 \leq i,j \leq n}}{\det((i+j)!)_{0 \leq i,j \leq n-1}} = \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k!\right)^2}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!\right)^2} = n!^2,$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ d\left(e_n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = n!.}$$

